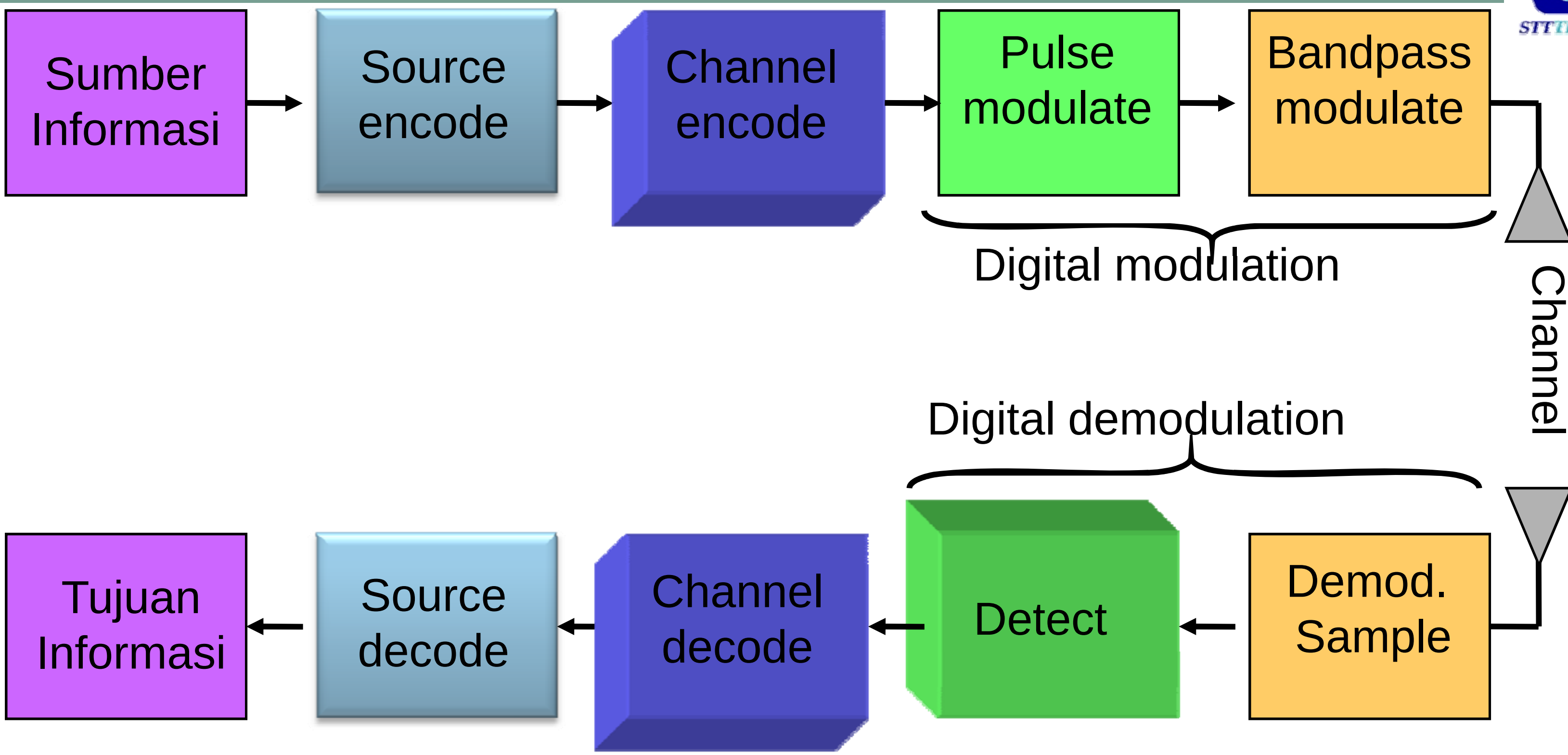
Modul #08

TE3223
SISTEM KOMUNIKASI 2

TE0RI INFORMASI

Program Studi S1 Teknik Telekomunikasi
Departemen Teknik Elektro - Sekolah Tinggi Teknologi Telkom
Bandung – 2007

Block diagram of a DCS

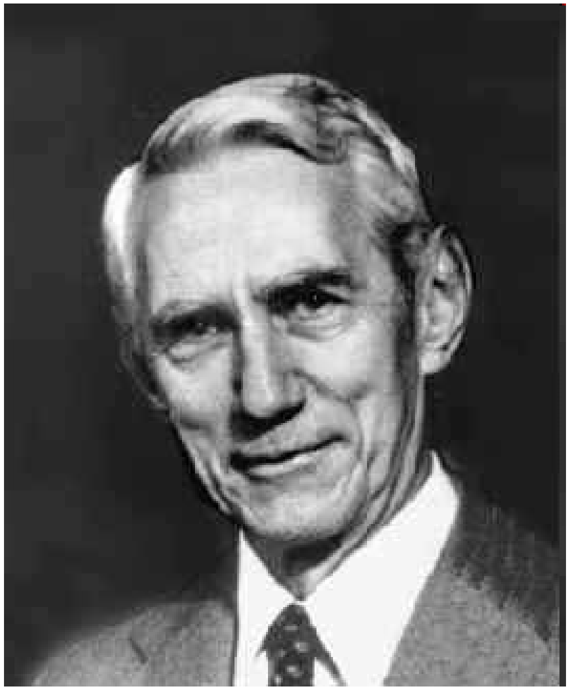


Teori Informasi menjawab 2 pertanyaan fundamental di dalam teori komunikasi, yaitu:

- Berapa besar kompresi data/kompresi sumber informasi dapat dilakukan, ***jawabannya adalah** entropy H*
- Berapa besar kecepatan transmisi suatu komunikasi, **jawabannya adalah kapasitas kanal C**

Introduction

- Pada thn 1940-an ada pendapat bahwa menaikkan rate transmisi melalui kanal komunikasi akan menaikkan “probability of error’.
- **Shannon** membuktikan bahwa pendapat di atas tidak benar selama rate transmisi lebih rendah dari kapasitas kanal. Kapasitas dapat dihitung dari derau di kanal.
- **Shannon j**uga berpendapat bahwa proses acak (speech, music) mempunyai nilai kompleksitas yang tidak dapat diperkecil, nilai tersebut adalah batas kompresi sinyal, yang diberi nama “entropy”.
- Bila entropy sumber informasi lebih kecil dari kapasitas kanal, maka komunikasi bebas error secara asomtotis bisa dicapai.



www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Shannon.html

Ada 2 ekstrem : **entropy ← ← ← → → → kapasitas kanal**
Semua cara-cara modulasi dan kompresi data terletak diantara dua ekstrem tersebut

Besaran-besaran dalam Teori Informasi

- Sumber Informasi
- Kandungan Informasi
- Entropy
- Joint Entropy
- Conditional Entropy
- Mutual Information

Yang didefinisikan sebagai fungsi Peluang / Distribusi Peluang

- Kapasitas kanal

Sumber Informasi

- Sumber informasi adalah suatu obyek yang menghasilkan event, dimana keluaran sumber informasi tergantung dari distribusi probability
- Dalam praktek, sumber informasi dapat dianggap sebagai suatu device yang menghasilkan pesan, dan dapat berupa analog atau diskrit
- Dalam kuliah teori informasi ini, sumber informasi yang sering dibahas adalah sumber **informasi diskrit**
- Pada **sumber informasi diskrit** akan menghasilkan sekumpulan (set) simbol yang disebut SOURCE ALPHABET. Dan elemen dari set source alphabet disebut SIMBOL atau LETTERS

Klasifikasi Sumber Informasi

- **Memory** : munculnya simbol bergantung pada simbol sebelumnya
- **Memoryless** : munculnya simbol tidak bergantung pada simbol sebelumnya

- Sumber Informasi diskrit yang memoryless disebut juga Discrete Memoryless Source (DMS)

Kandungan Informasi

Misal suatu DMS (discrete memoryless sources) yang dinotasikan $S=\{s_1, s_2, .., s_q\}$, dengan masing-masing probability $p(s_i)=p_i$, dan berlaku $\sum_i^q p(s_i) = 1$

Maka **kandungan informasi** dari simbol S_i adalah :

$$I(s_i) = \log_2 \frac{1}{p(s_i)} = -\log_2 p(s_i)$$

Satuan yang digunakan adalah **bits**

Information

- Example 1:

$S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $p_1=1/2$, $p_2=1/4$, $p_3= p_4=1/8$.

$I(s_1)=\log_2 2=1$ bits
$I(s_2)=\log_2 4=2$ bits
$I(s_3)=I(s_4)=\log_2 8=3$ bits

- Example 2:

$S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $p_1= p_2= p_3= p_4=1/4$.
$I(s_1)=I(s_2)=I(s_3)=I(s_4)=\log_2 4=2$ bits

Information

- Properties of $I(s)$
  1) $I(s) \geq 0$ (a real nonnegative measure)
  2) $I(s_1 s_2) = I(s_1)+I(s_2)$ for independent event.
  3) $I(s)$ is a continuous function of p.
  4) $I(s) = 0$ for $p(s_i)=1$
  5) $I(s_1) > I(s_2)$ if $p(s_1) > p(s_2)$
- Intuitively, property 2 tells us that each outcome, e.g., coin or die, has no influence on the outcome of the other.

Entropy

- Adalah parameter yang menyatakan kandungan informasi rata-rata persimbol
- Entropy dari sumber S yang mempunyai simbol-simbol s_i dan probability p_i :

$$H(S) = \sum_{i=1}^{q} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) = H(P)$$

- Example 1 : $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $p_1=1/2$, $p_2=1/4$, $p_3= p_4=1/8$.

$$H(S) = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{8}\log_2 8 + \frac{1}{8}\log_2 8$$

$$= \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{11}{8} = 1.75 bits$$

- Example 2: $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $p_1= p_2= p_3= p_4=1/4$.

$$H(S) = \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{4}\log_2 4 + \frac{1}{4}\log_2 4 = 2 bits$$

Entropy dari sumber memoryless binary

Consider the distribution consisting of just two events [S_1, S_2]. Let p be the probability of the first symbol (event).

Then, the entropy function is :

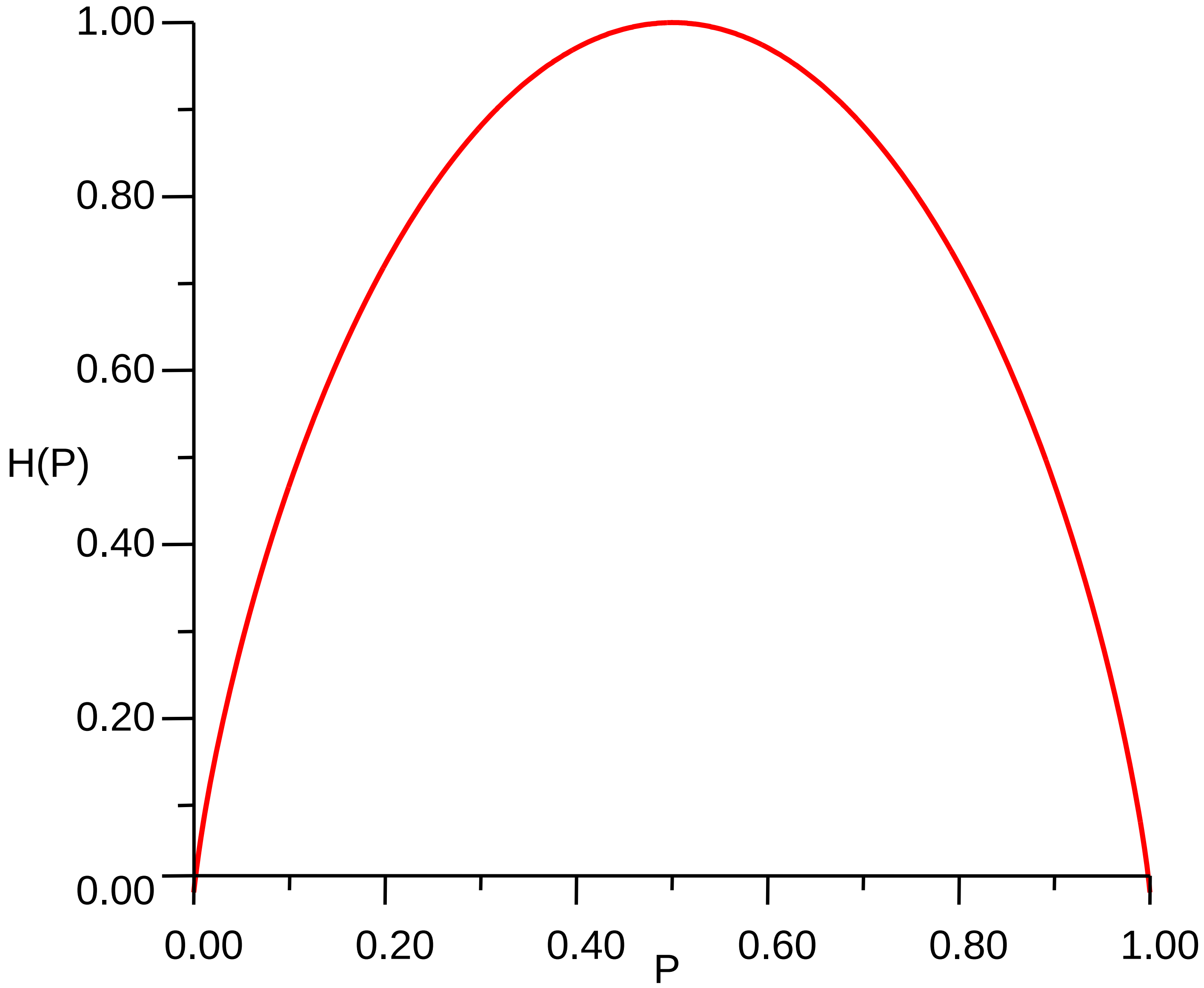
$$H_2(S) = p\log_2(1/p) + (1-p)\log_2[1/(1-p)] = H_2(P)$$

➔The maximum of $H_2(P)$ occurs when $p = 1/2$.

$$I(s_1) = I(s_2) = -\log_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} = \log_2 2 = 1$$

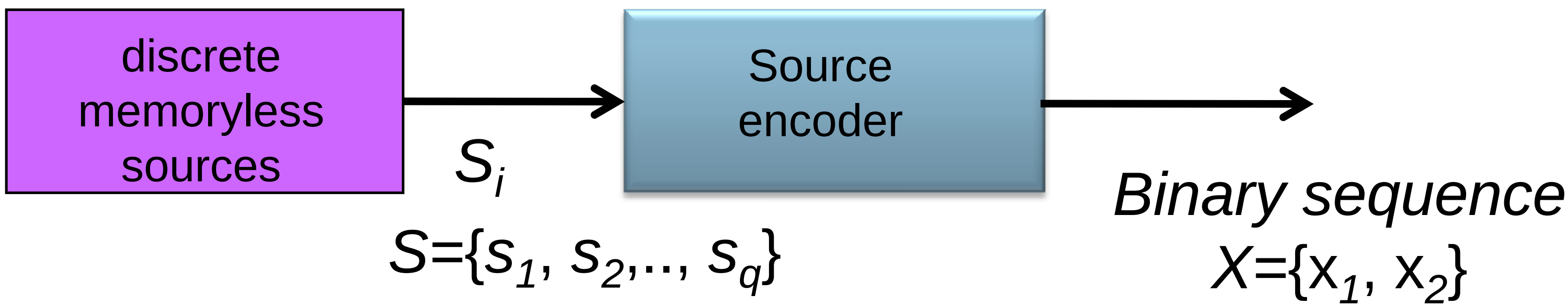
$$H_2(S) = \tfrac{1}{2} I(s_1) + \tfrac{1}{2} I(s_2) = 1$$

Entropy dari sumber memoryless binary



SOURCE CODING

- Adalah konversi output dari DMS ke bentuk binary sequence, devicenya disebut SOURCE ENCODER



- Tujuan dari source coding adalah untuk meminimalisasi ***bit rate*** rata-rata yang merepresentasikan DMS dengan cara mereduksi redundansi dari DMS (➔mengurangi jumlah simbol yang sering muncul)

Panjang Kode & Efisiensi Kode

- Misal S adalah DMS dengan entropi H(S) dan alphabet $S=\{s_1, s_2,.., s_q\}$ dengan masing-masing probability $p(s_i)=p_i$, *(i=1, 2,…, q)*
- Code dari binary sequence keluaran Source Encoder X_i memiliki **panjang n_i bit**, maka **panjang code word rata-rata** didefinisikan:

$$L = \sum_{i=1}^{q} p(S_i).n_i$$

- Parameter L merepresentasikan jumlah bit per sumber simbol yang merupakan keluaran dari Source Encoder
- Efisiensi dari codeword didefinisikan sebagai berikut:

$$\eta = L_{\min} / L$$

- L_{min} adalah nilai L minimum yang mungkin muncul. Apabila η = 1 maka kode dikatakan efisien.
- Sedangkan redundansi dari kode didefinisikan: $\gamma = 1 - \eta$

TEOREMA SOURCE CODING

- Teorema Source Coding menyatakan bahwa untuk DMS dari S dengan entropy H(S), maka **panjang codeword rata-rata** dibatasi oleh:

$$L \geq H(S)$$

- Apabila $L_{min} = H(S)$, maka: $\eta = \dfrac{H(S)}{L}$
- Secara umum: $L \geq L_{min}$ dan $\eta \leq 1$
- Suatu Source Coding dikatakan optimal jika panjang kode minimal (memiliki L_{min})

Kraft In-Equality (ketidaksamaan Kraft)

Jika S adalah DMS dengan alphabet $S=\{s_1, s_2,.., s_q\}$ dan masing-masing codeword yang dihasilkan adalah n_i , maka berlaku :

$$\sum_{i=1}^{q} 2^{-ni} \leq 1$$

CONTOH SOURCE CODING (1)

SHANNON – FANO CODING

PROSEDUR:

1) Urutkan sumber simbol berdasarkan probabiltas dari yang terbesar ke yang terkecil
2) Bagi sumber simbol menjadi 2 set dimana masing-masing set mempunyai probabilitas yang hampir sama. Beri tanda bit “0” untuk set yang tinggi dan bit “1” untuk set yang lebih rendah
3) Ulangi proses di atas sampai tidak mungkin sumber simbol dibagi lagi

Contoh: Tentukan keluaran Source Coding dengan prosedur Shannon-Fano untuk keluaran DMS sebanyak 6 simbol dengan peluangnya 0,05; 0,08; 0,12; 0,20; 0,25; 0,30

Solusi:

S_i	$P(S_i)$	Step 1	Step 2	Step 3	Step 4	Step 5 Codeword
S_1	0,30	0	0			00
S_2	0,25	0	1			01
S_3	0,20	1	0			10
S_4	0,12	1	1	0		110
S_5	0,08	1	1	1	0	1110
S_6	0,05	1	1	1	1	1111

- Buktikan bahwa:
  - H(S) = 2,36 bits/simbol
  - L=2,38 bits/simbol
  - η=0,99

CONTOH SOURCE CODING (2)

HUFFMAN-CODING

Source coding ini adalah salah satu kode yang optimum dan mempunyai efisiensi yang tinggi

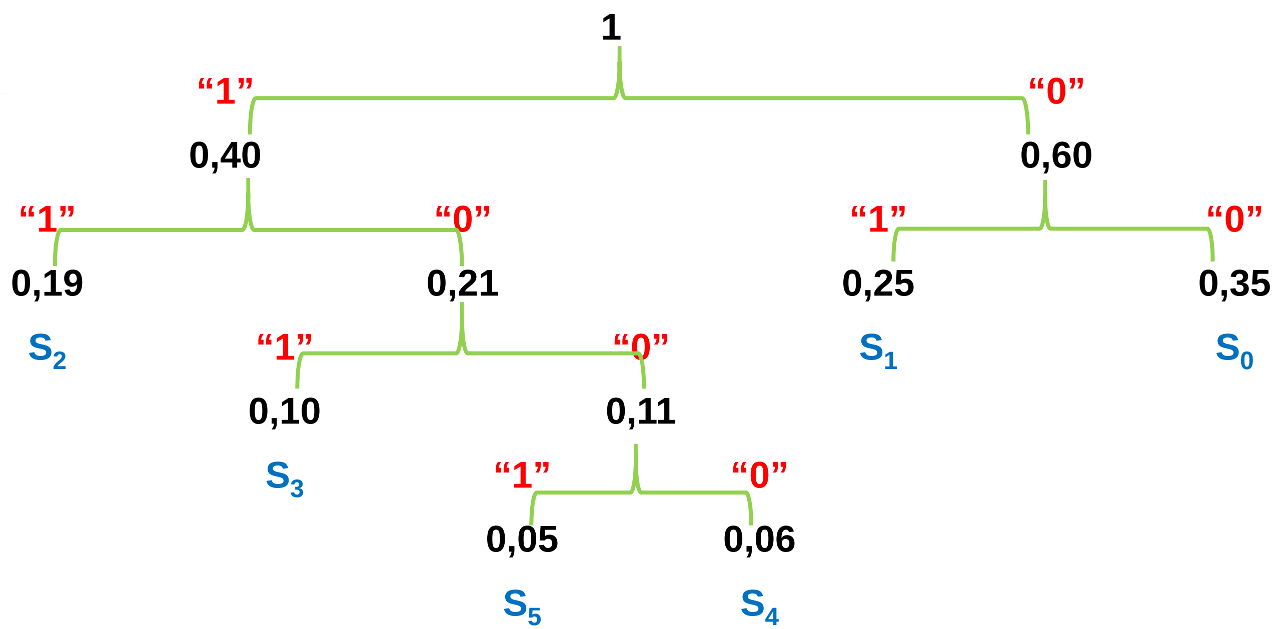
PROSEDUR:

1. Urutkan simbol berdasarkan probabilitasnya dari terbesar ke terkecil
2. Jumlahkan probabilitas 2 buah simbol dari probabilitas terkecil dan urutkan kembali probabilitasnya mulai yang terbesar
3. Beri tanda bit “0” untuk probabilitas yang lebih kecil dan tanda bit “1” untuk probabilitas yang lebih besar
4. Ulangi langkah di atas sampai jumlah probabilitasnya = 1

Contoh: Tentukan keluaran Source Coding dengan prosedur Huffman untuk keluaran DMS sebanyak 6 simbol dengan peluangnya 0,05; 0,06; 0,10; 0,19; 0,25; 0,35

Solusi:

S_i	$P(S_i)$	Probability								
S_0	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,40	0,40	0,60	1
S_1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,35	0,60	0,40	
S_2	0,19	0,19	0,19	0,19	0,21	0,40	0,25			
S_3	0,10	0,10	0,11	0,21	0,19					
S_4	0,06	0,11	0,10							
S_5	0,05									



S_i	codeword
S_0	00
S_1	01
S_2	11
S_3	101
S_4	1000
S_5	1001

Tugas, dikumpulkan !

1. Diketahui simbol-simbol keluaran DMS sebagai berikut:

Simbol	Probability
S_0	0,4
S_1	0,2
S_2	0,2
S_3	0,1
S_4	0,1

   a. Dengan menggunakan prosedur Shannon-Fano, tentukan simbol-simbol (codeword) output Source Coding !
   b. Tentukan efisiensi codeword yang dihasilkan (bag a)!
   c. Dengan menggunakan prosedur Huffman, tentukan simbol-simbol (codeword) output Source Coding !
   d. Tentukan efisiensi codeword yang dihasilkan (bag c)!

2. Diketahui simbol-simbol keluaran DMS sebagai berikut:

Simbol	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Probability	0,3	0,25	0,20	0,12	0,08	0,05

Pertanyaan sama spt soal no 1

Discrete Memoryless Channel

- Merupakan pemodelan kanal secara statistik dari DMS
- **X dan Y** adalah random variable untuk input dan output dari DMC
- Kanal disebut ‘Discrete’ karena sumber simbol yang dikirimkan dan output kanal adalah diskrit dan ukurannya terbatas
- Pemodelan input : $X = [x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , x_{J-1}]$
- Pemodelan output : $Y = [y_0, y_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , y_{K-1}]$

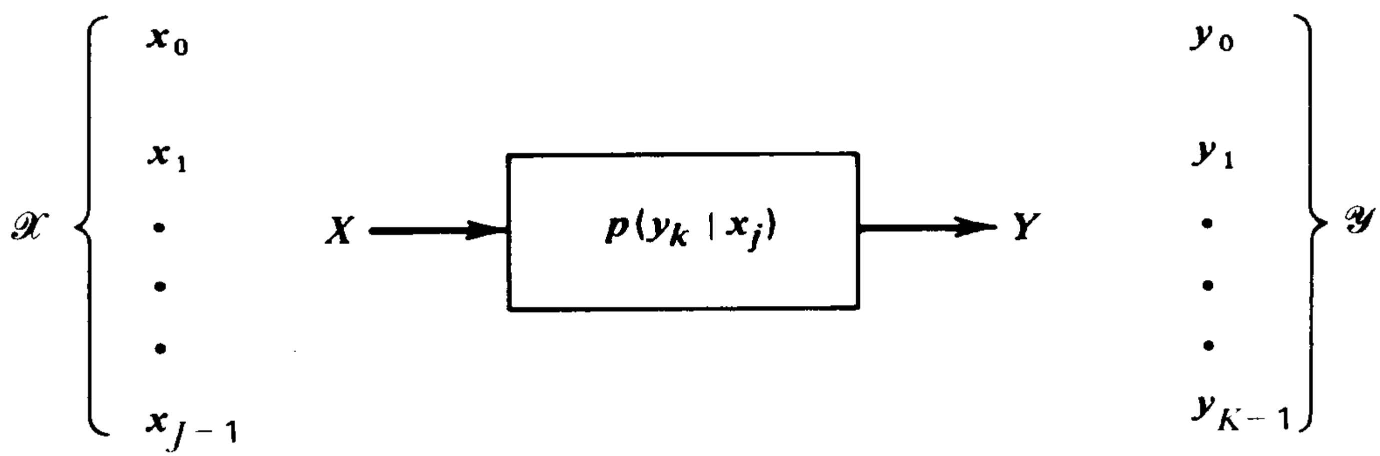


Figure 10.8. Discrete memoryless channel.

Discrete Memoryless Channel

- Probabilitas Transisi kanal (➔peluang bersyarat):

$$P(y_k/x_j) = P[Y=y_k/X=x_j] \text{ untuk semua j dan k}$$

- Secara umum $0 \le P(y_k/x_j) \le 1$ untuk semua j dan k
- Model matrik DMC disebut juga Matrik Transisi atau Matrik Kanal:

$$\begin{bmatrix} p(y_0) \\ p(y_1) \\ \\ \\ p(y_{k-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(y_0 | x_0), p(y_1 | x_0) & \ldots\ldots\ldots & p(y_{k-1} | x_0) \\ p(y_1 | x_1), p(y_1 | x_1) & \ldots\ldots\ldots & p(y_{k-1} | x_1) \\ \\ \\ p(y_0 | x_{j-1}), p(y_1 | x_{j-1}) & \ldots\ldots\ldots & p(y_{k-1} | x_{j-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \\ \\ p(x_{j-1}) \end{bmatrix}$$

Pb of output — channel matrix — priori Pb

- Untuk 1 baris yang sama berlaku: $\sum_{k=0}^{k-1} P(y_k / x_j) = 1$ untuk setiap j

Discrete Memoryless Channel

- Didefinisikan $P(x_j) = P[X=x_j]$ untuk j = 0, 1, ……………., J-1
- Adalah probabilitas munculnya $X=x_j$ pada input kanal disebut juga "apriori probability"
- Didefinisikan 'Joint Probability Distribution' dari random variable X dan Y

$$\begin{aligned} P(x_j,y_k) &= P[X=x_j, Y=y_k] \\ &= P[Y=y_k/X=x_j] \; . \; P[X=x_j] \\ &= P[y_k/x_j] \; . \; P[X=x_j] \end{aligned}$$

- Didefinisikan 'Marginal Probability Distribution' dari random variable Y :

$$\begin{aligned} P(y_k) &= P(Y=y_k) \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} P(Y=y_k / X=x_j).P(X=x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} P(y_k / x_j).P(x_j) \end{aligned}$$

Untuk setiap k = 0, 1, ……………., K-1

Kasus: Binary Simetric Channel

- Pada kasus ini kanal mempunyai 2 input simbol: x_1=0 dan x_2=1 ➔ X
- Dan mempunyai 2 output simbol: y_1=0 dan y_2=1 ➔ Y
- Kanal disebut simetik karena:

$$P(y_1=1/x_0=0) \ = \ P(y_0=0/x_1=1) = \ p$$

$$P(y_0=0/x_0=0) \ = \ P(y_1=1/x_1=1) = \ 1\text{-}p$$

- Probabilitas error dinyatakan **p**, diagram probabilitas transisinya sbb:

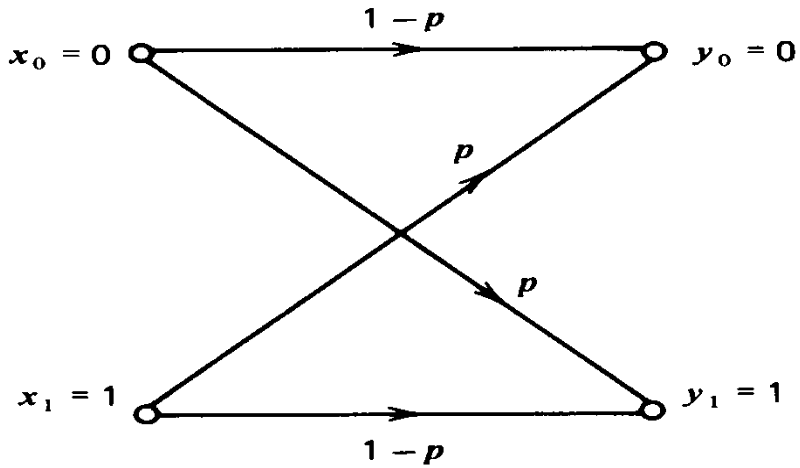


Figure 10.9 Transition probability diagram of binary symmetric channel.

Matrik Kanal

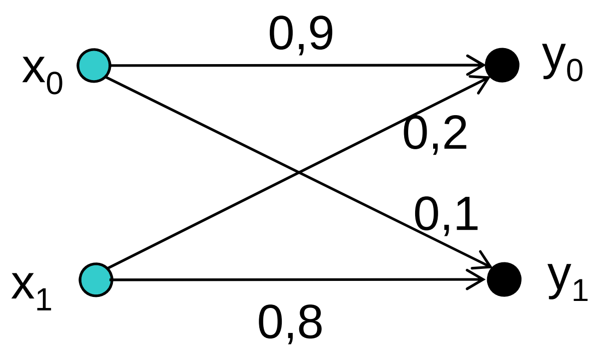
$$P[Y/X] = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

Ingat Model Matrik:

$$P(Y) = P[Y/X].P(X)$$

Latihan Soal:

- Diketahui suatu binary channel (bukan simetrik) sbb:
- $P(x_0) = P(x_1) = 0{,}5$



a. Cari matrik kanal !
b. Cari $P(y_0)$ dan $P(y_1)$!
c. Cari "Joint probability" $P(x_0,y_1)$ dan $P(x_1,y_0)$

Mutual Information

- Didefinisikan H(X/Y) = conditional entropy dari input kanal bila output dari kanal sudah diobservasi.
- Didefinisikan H(Y/X) = conditional entropy dari output kanal bila input dari kanal sudah diobservasi.

$$H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1} H\left(X|Y = y_k\right) p(y_k)$$

$$= \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{K}-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j \mid y_k) p(y_k) \log_2\left[\frac{1}{p(x_j \mid y_k)}\right]$$

$$= \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{K}-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k) \log_2\left[\frac{1}{p(x_j \mid y_k}\right]$$

- Maka MUTUAL INFORMATION didefinisikan:

$$I(X\,;\,Y) = H(X) - H\left(X|Y\right)$$

Mutual Information

- MUTUAL INFORMATION merepresentasikan kandungan informasi dari X apabila output kanal sudah diketahui **➔I(X;Y)**

- **Property of Mutual Information:**

1) The mutual information of a channel is symmetric

$$I(X;Y) = I(Y;X) \qquad\qquad I(Y;X) = H(X) - H(Y|X)$$

uncertainty about the channel output that i s resolved bysending the channel input

uncertainty about the channel input that is resolved by observing the channel output

2) the mutual information is always nonnegative; that is $I(X;Y) \geq 0$

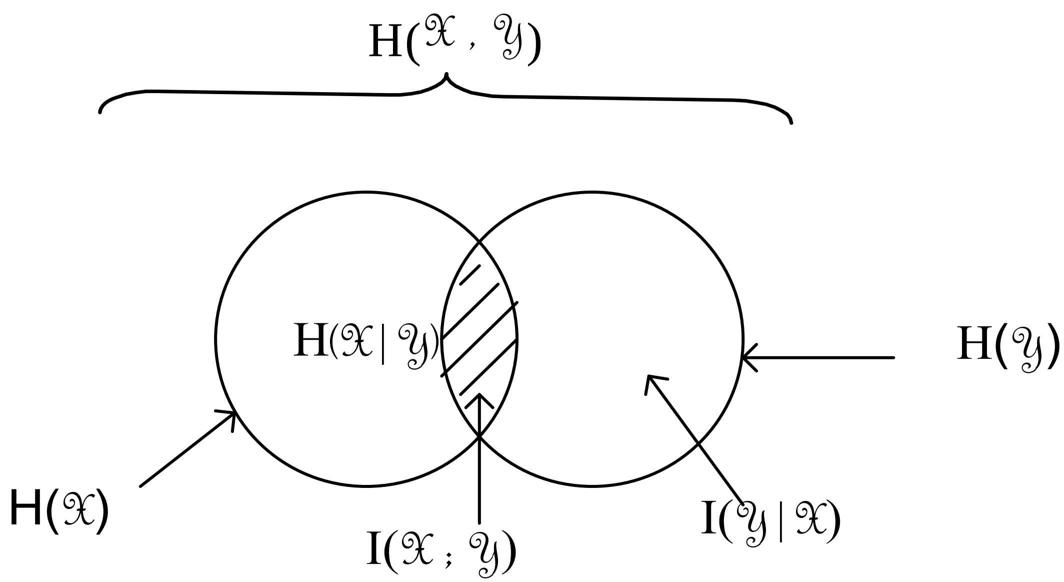
Property of Mutual Information:

3) if the joint entropy H (X , Y) is defined by

$$H\left(X\,,\,Y\right)=\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1}p(x_j,y_k)\log_2\left(\frac{1}{p(x_j,y_k)}\right)$$

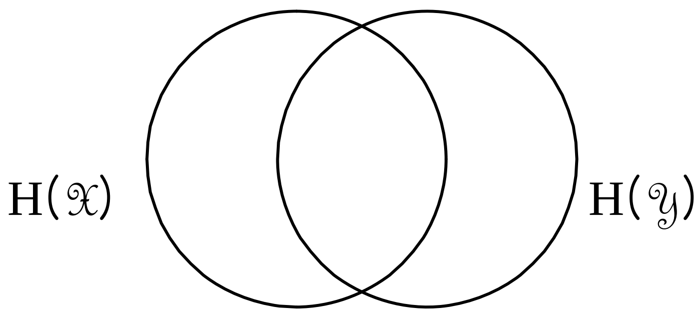
so:

$$I\left(X\,;Y\right)=H\left(X\right)+H\left(Y\right)-H\left(X\,,\,Y\right)$$

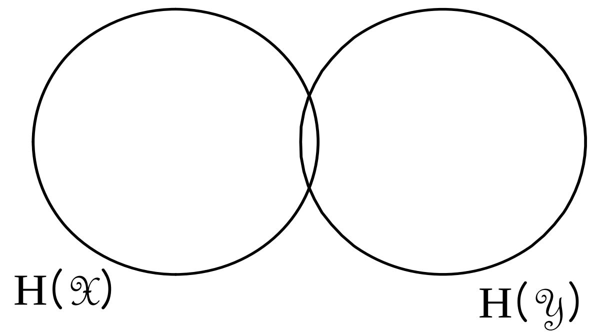


Property of Mutual Information:

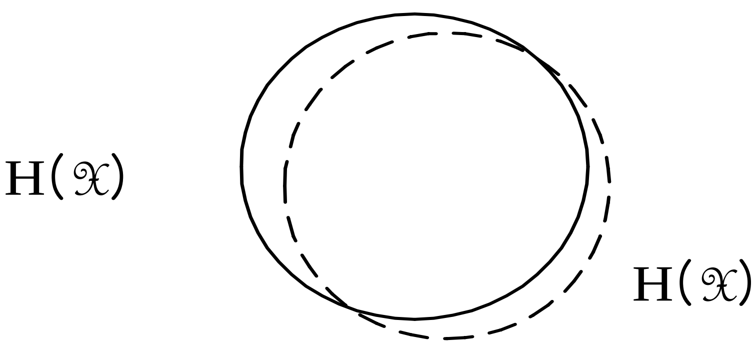
Good Channel



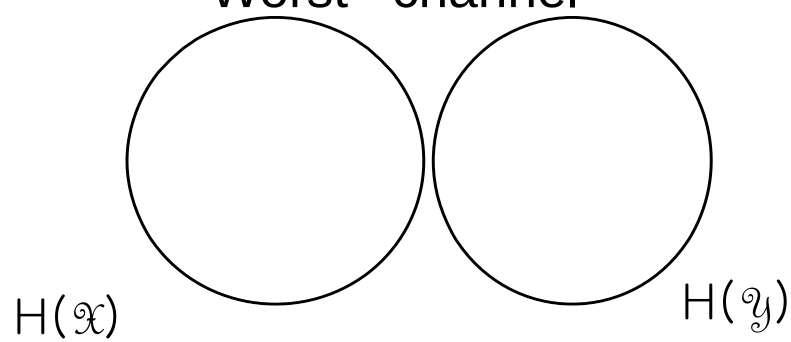
Bad Channel



No error



Worst channel



KAPASITAS KANAL

- Kapasitas kanal dari Discrete Memoryless Channel didefinisikan:

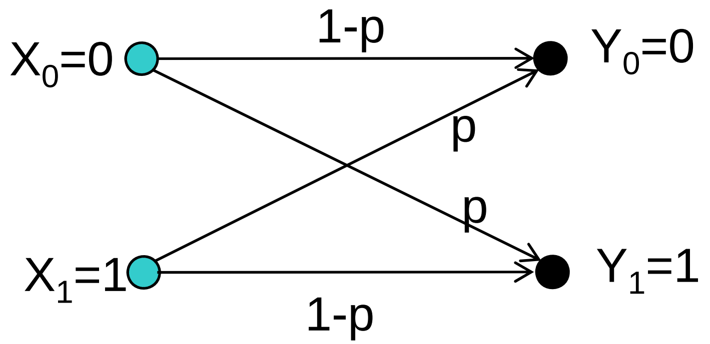
$$C = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y) \quad \text{[bits /channel]}$$

- Jadi Kapasitas Kanal adalah mencari mutual information maksimum untuk semua Probabilitas simbol input yang mungkin

$$p(x_j) \geq 0, \text{ untuk setiap } j$$

$$\sum_{i}^{J-1} p(x_i) = 1$$

- Contoh kasus BSC Binary Simetric Channel:



KAPASITAS KANAL

- Contoh kasus BSC Binary Simetric Channel
- Entropy dari X akan maksimum jika $P(x_0) = P(x_1) = 0{,}5$, sehingga $I(X;Y)$ juga akan maksimal.

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

$$= p(x_0)\log\frac{1}{p(x_0)} + p(x_1)\log\frac{1}{p(x_1)} - p(x_0,y_0)\log_2\left[\frac{1}{p(x_0|y_0)}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} p(x_j,y_k)\log_2\frac{p(y_k|x_j)}{p(y_k)}$$

$$p(x_0,y_0) = p(y_0|x_0)p(x_0) = \frac{1}{2}(1-p) = (x_1,y_1)$$

$$p(x_1,y_0) = p(y_0|x_1)p(x_1) = \frac{1}{2}p = p(x_0,y_1)$$

$$p(y_0) = \frac{1}{2} \qquad p(y_1) = \frac{1}{2}$$

KAPASITAS KANAL

- Contoh kasus BSC Binary Simetric Channel

$$\therefore C = \left\{\frac{1}{2}(1-p)\log_2 2(1-p)\right\}\times 2 + \left\{\frac{1}{2}p\log_2 2p\right\}\times 2$$

$$= (1-p)\{1+\log_2(1-p)\} + p\{\log p + 1\}$$

$$= 1 + (1\text{-p})\log_2(1-p) + p\log_2 p$$

- **Dari Grafik:**
- Jika kanal bebas noise (p=0), C akan maksimum yaitu 1 bits/ch; tetapi entropinya akan minimum [H(p)=0]
- Jika kanal ada noise dgn p=1/2, C akan minimum yaitu 0 bits/ch; tetapi entropinya akan maksimum [H(p)=1] ➔kondisi ini disebut useless
- Kondisi inverting Channel, Jika kanal bebas noise (p=1), C akan maksimum yaitu 1 bits/ch

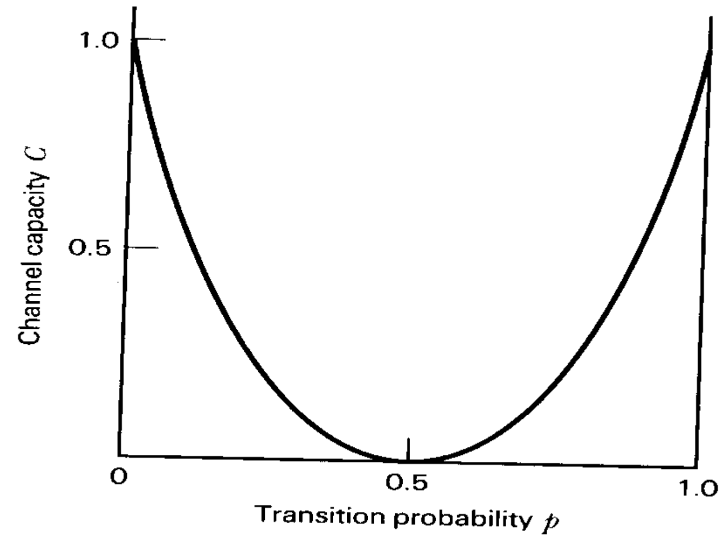
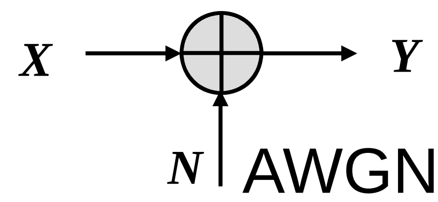


Figure 10.11 Variation of channel capacity of a binary symmetric channel with transition probability *p*.

Information Capacity Theorem
(Shannon's 3 rd theorem)

- Teori kapasitas informasi Shannon pada kanal AWGN adalah membahas teori kapasitas informasi pada kanal "Additive Band Limited White Gausian Noise" dengan zero mean dan variansi σ^2.
- Kapasitas pada kanal AWGN:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{P}{N_0B}\right) \quad \text{bps}$$



- Formula tersebut didapat dari: $C = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y)$
- Dimana:
  - C = kapasitas (bps)
  - B = bandwidth kanal (Hz)
  - No = PSD AWGN (W/Hz)
  - N = No.B = Noise Power (W)
  - P = average transmitted power (W)

$$\frac{P}{N_0B} = \frac{S}{N}$$

ideal system : bit rate $R_b = C$

$$\therefore \text{avg power} \quad P = E_b C$$

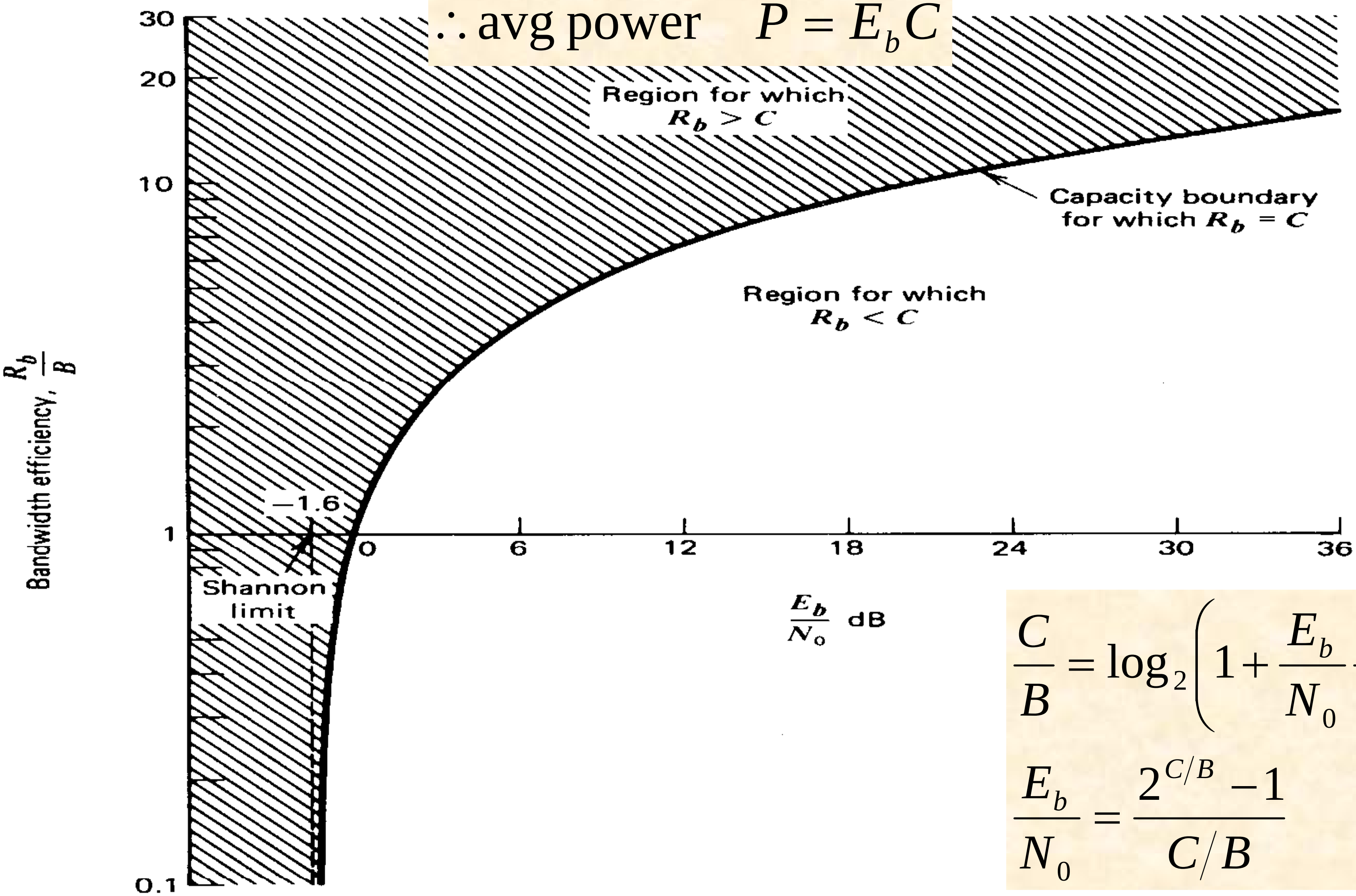


Figure 10.16 Bandwidth-efficiency diagram.

$$\frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{C}{B}\right)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B}$$

Information Capacity

- <observation>
- Eb/No = energi per bit to noise power spectral density ratio

Shannon limit

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = \lim_{B\to\infty}\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = \lim_{B\to\infty}\frac{2^{C/B}-1}{C/B} = \ln 2 = 0.693 = -1.6dB$$

$$C_\infty = \lim_{B\to\infty} C = \lim_{B\to\infty} B\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 B}\right) = \frac{P}{N_0}\log_2 e$$

- capacity boundary : R_b= C
  - R_b <C error – free TX is possible
  - R_b > C error –free TX is not possible

Information Capacity

→ horizontal line : for fixed R_b / B , $P_e \xleftrightarrow{\text{trade off}} E_b / N_0$

vertical line : for fixed E_b / N_0 , $P_e \xleftrightarrow{\text{trade off}} R_b / B$

- error rate diagram of ideal system

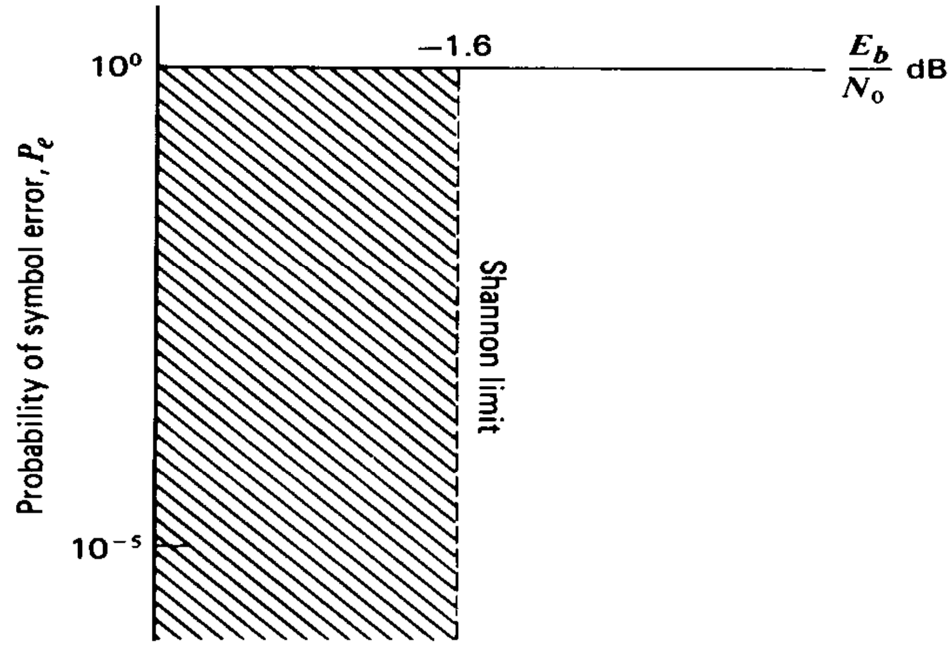
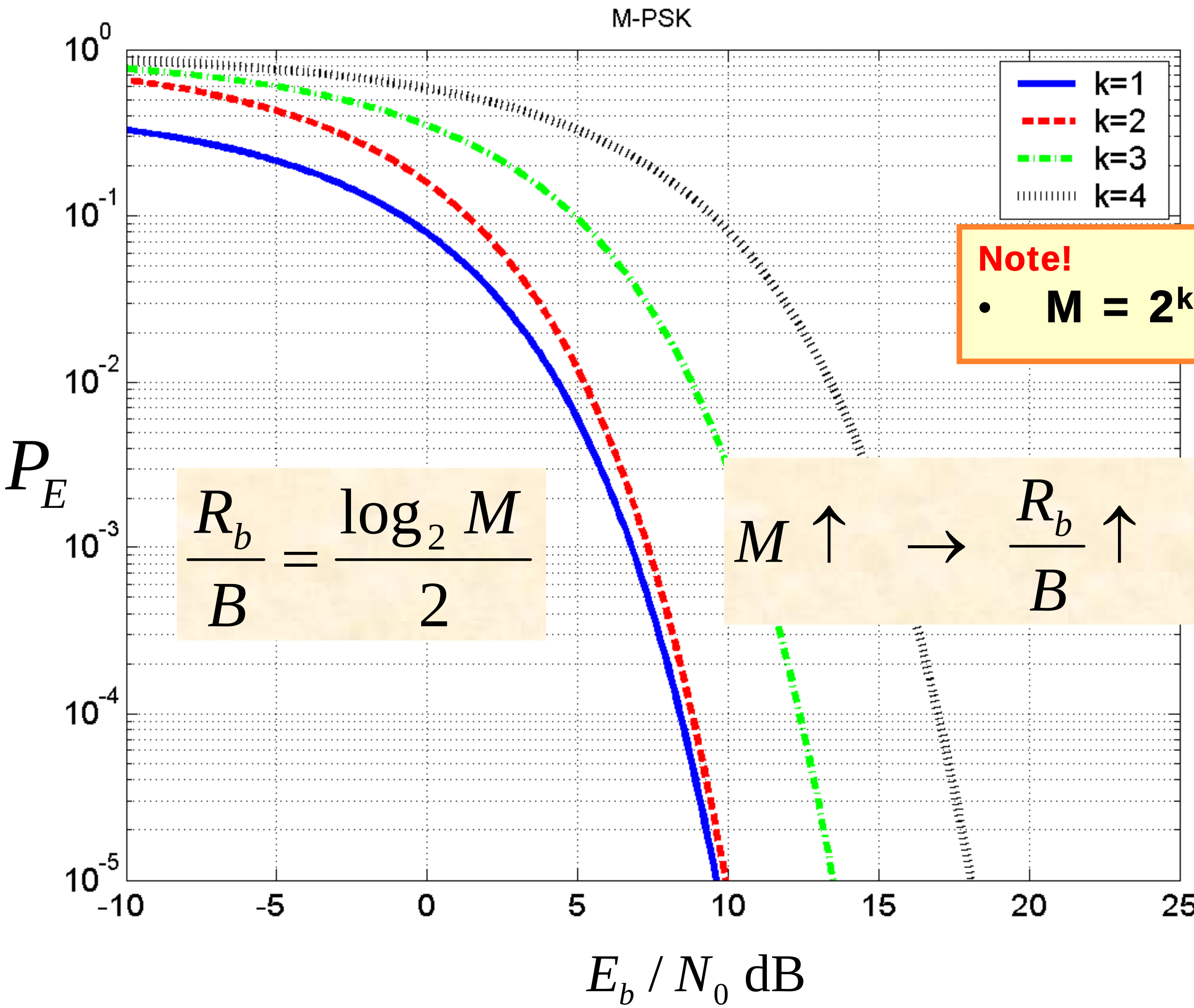


Figure 10.17 Error-rate diagram.

M-ary PSK

Lihat pula figure 9.17 Buku Simon Haykin 4th Edt: Pe vs Eb/No, pd $P_e = 10^{-5}$



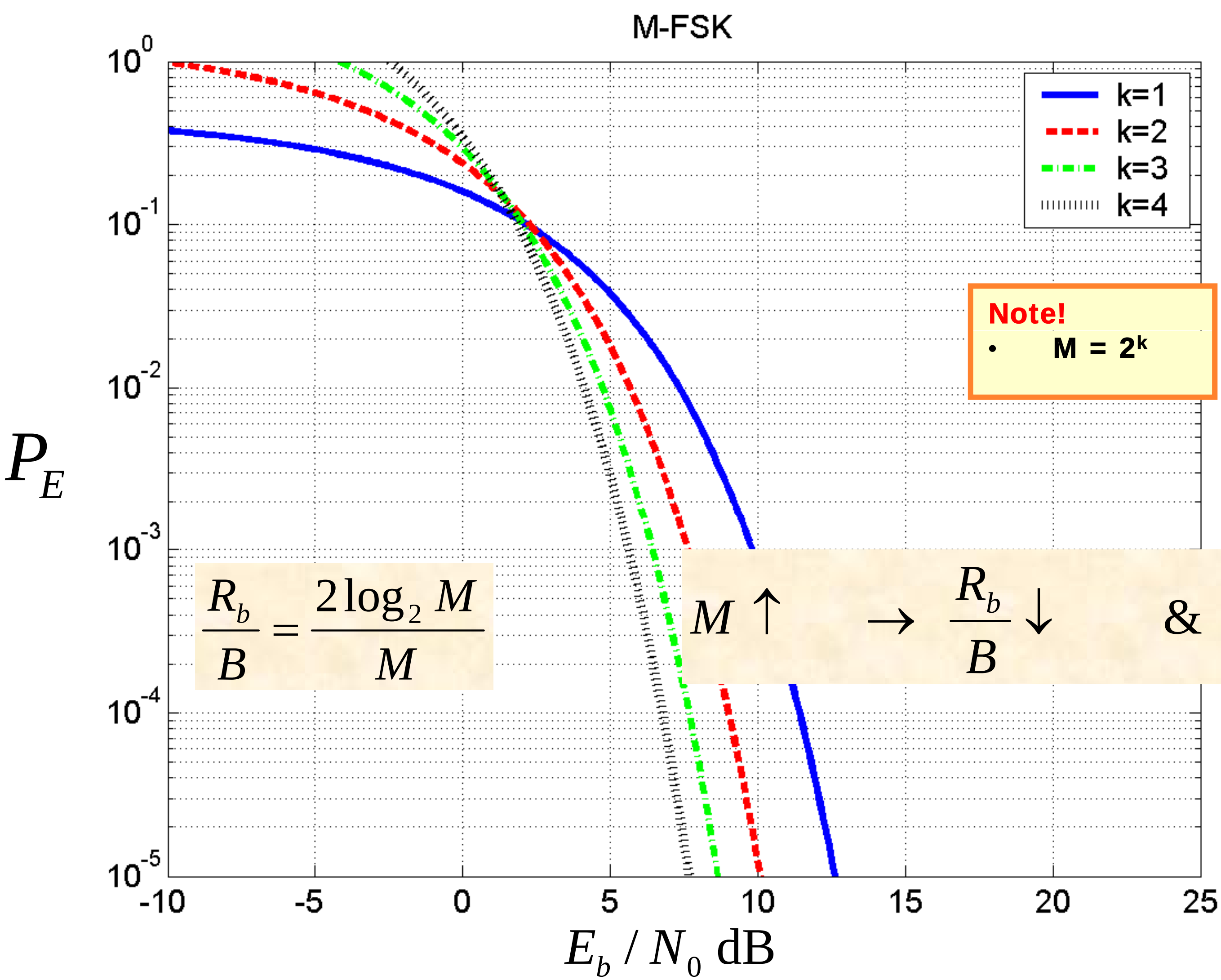
Note!
- **$M = 2^k$**

$$\frac{R_b}{B} = \frac{\log_2 M}{2}$$

$$M\uparrow \quad \rightarrow \quad \frac{R_b}{B}\uparrow \quad \text{but} \quad E_b/N_0\uparrow$$

M-ary FSK

Lihat pula figure 9.17 Buku Simon Haykin 4th Edt: Pe vs Eb/No, pd $P_e = 10^{-5}$



$$\frac{R_b}{B} = \frac{2\log_2 M}{M}$$

$$M \uparrow \quad \rightarrow \quad \frac{R_b}{B} \downarrow \quad \& \quad \mathrm{E_b} / N_0 \downarrow$$

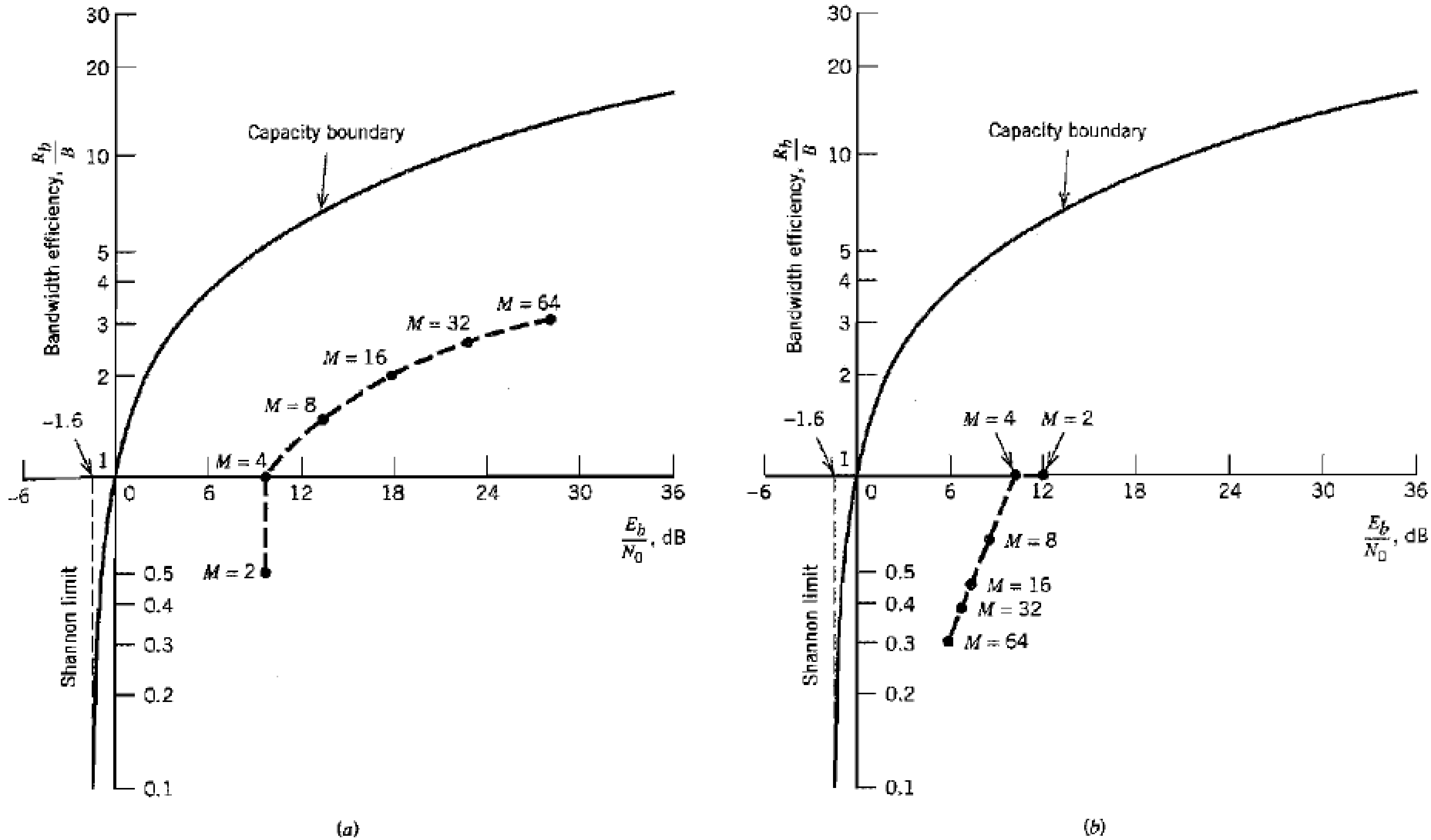


FIGURE 9.17 (*a*) Comparison of *M*-ary PSK against the ideal system for $P_e = 10^{-5}$ and increasing *M*. (*b*) Comparison of *M*-ary FSK against the ideal system for $P_e = 10^{-5}$ and increasing *M*.