Sistem Komunikasi II
(*Digital Communication Systems*)

Lecture #1: Stochastic Random Process

Topik:

1.1 Pengenalan Sistem Komunikasi Digital.

1.2 Pendahuluan *Stochastic Random Process.*

1.3 *Random Variable* & parameter statistiknya.

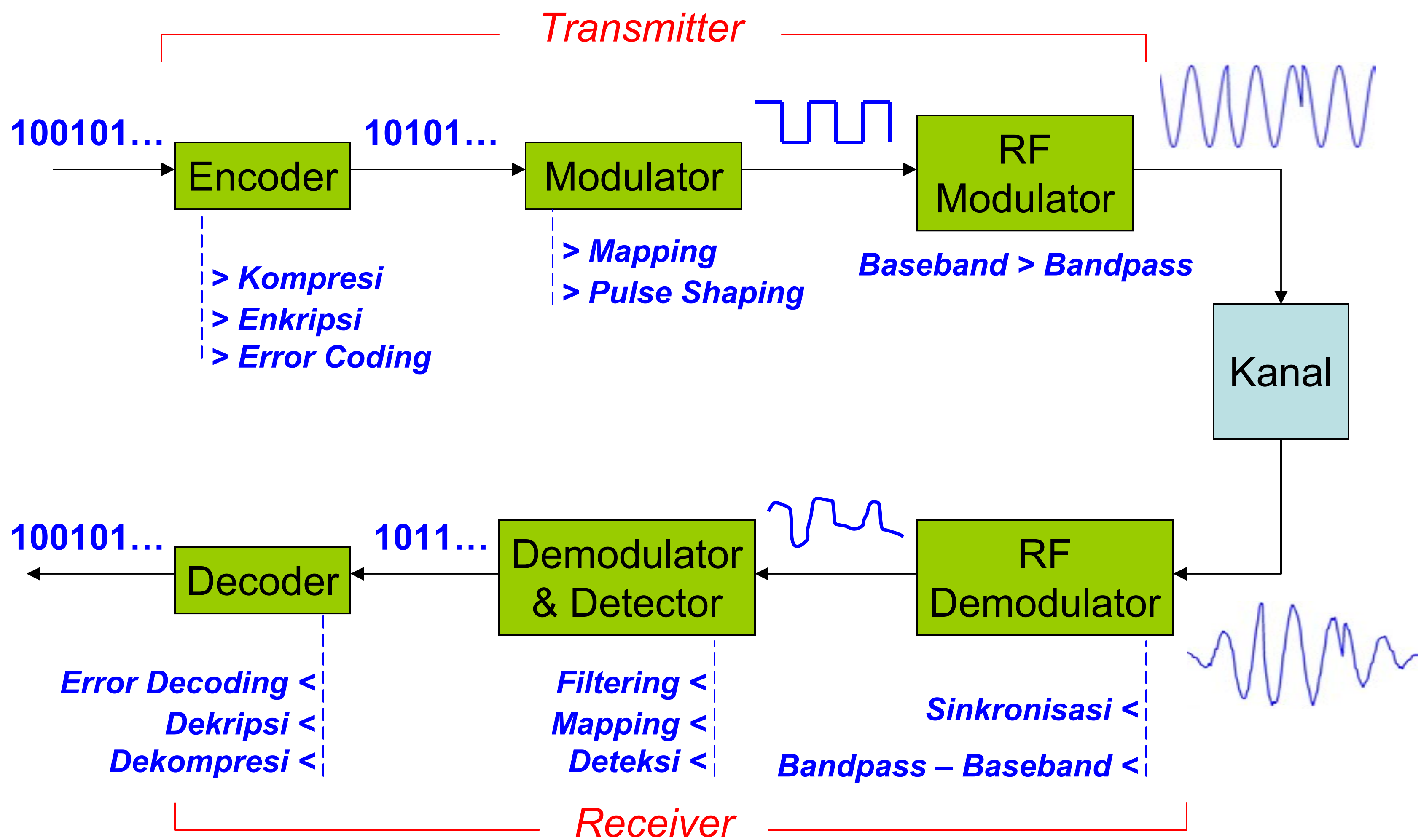
1.4. *Random Process* & parameter statistiknya.

1.5. Bentuk *Auto-Korelasi* dan *PSD* untuk beberapa Sinyal Dasar.

1.6 Transmisi Sinyal melalui Sistem Linier.

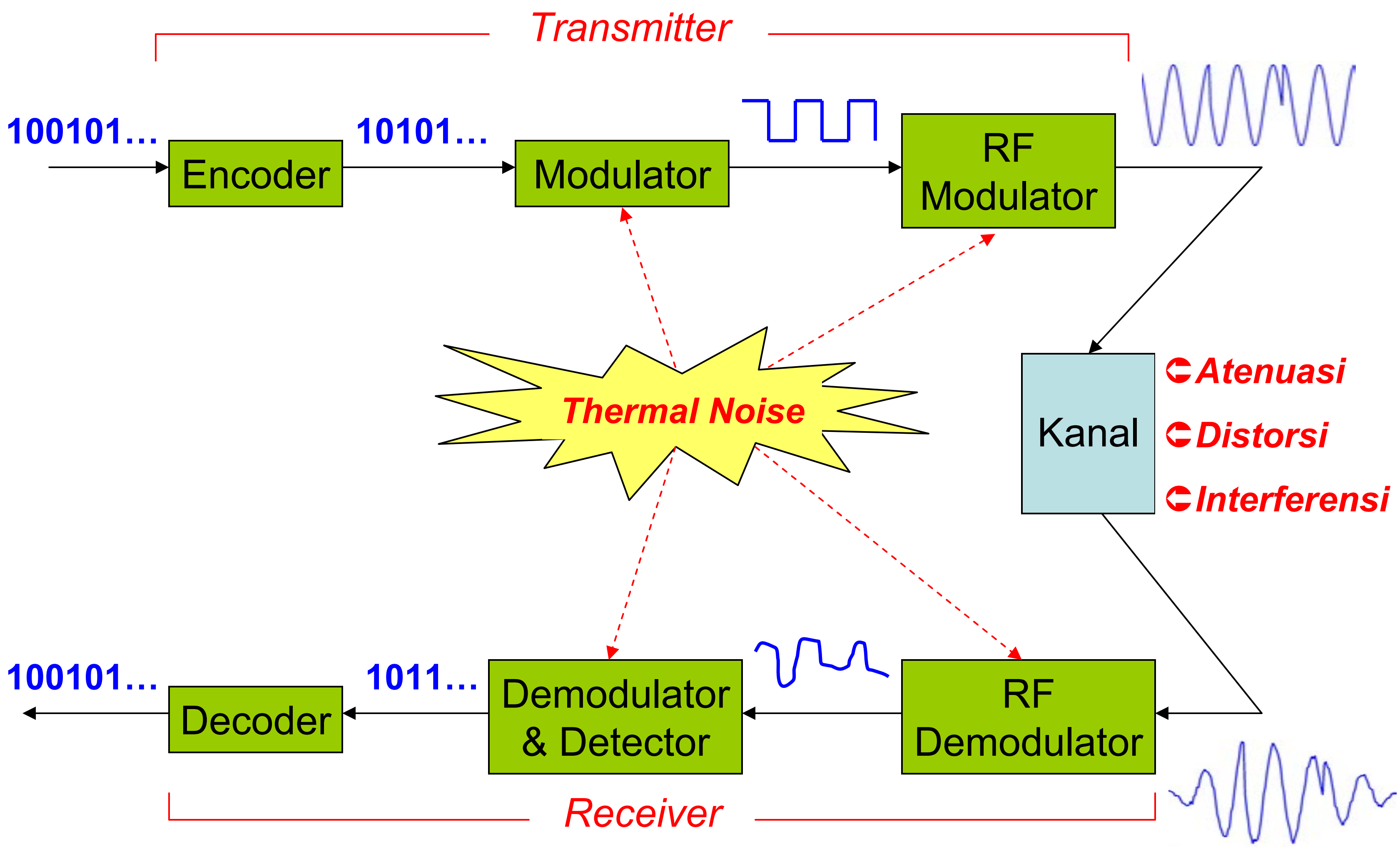
1.1. Pengenalan Sistem Komunikasi Digital

Block Diagram dari Sistem Komunikasi Digital:



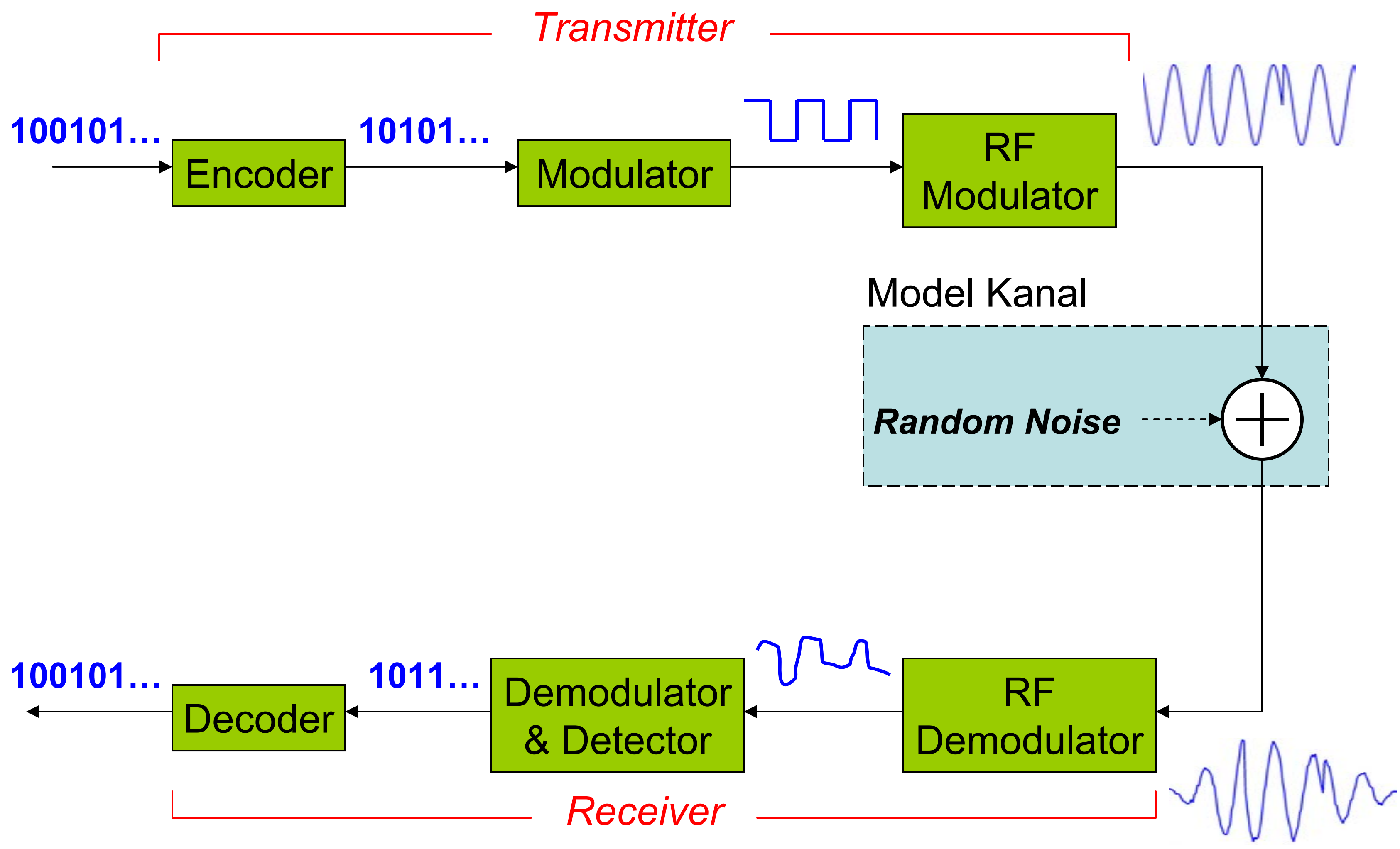
1.1. Pengenalan Sistem Komunikasi Digital – cont.

Gangguan dalam Sistem Komunikasi Digital:



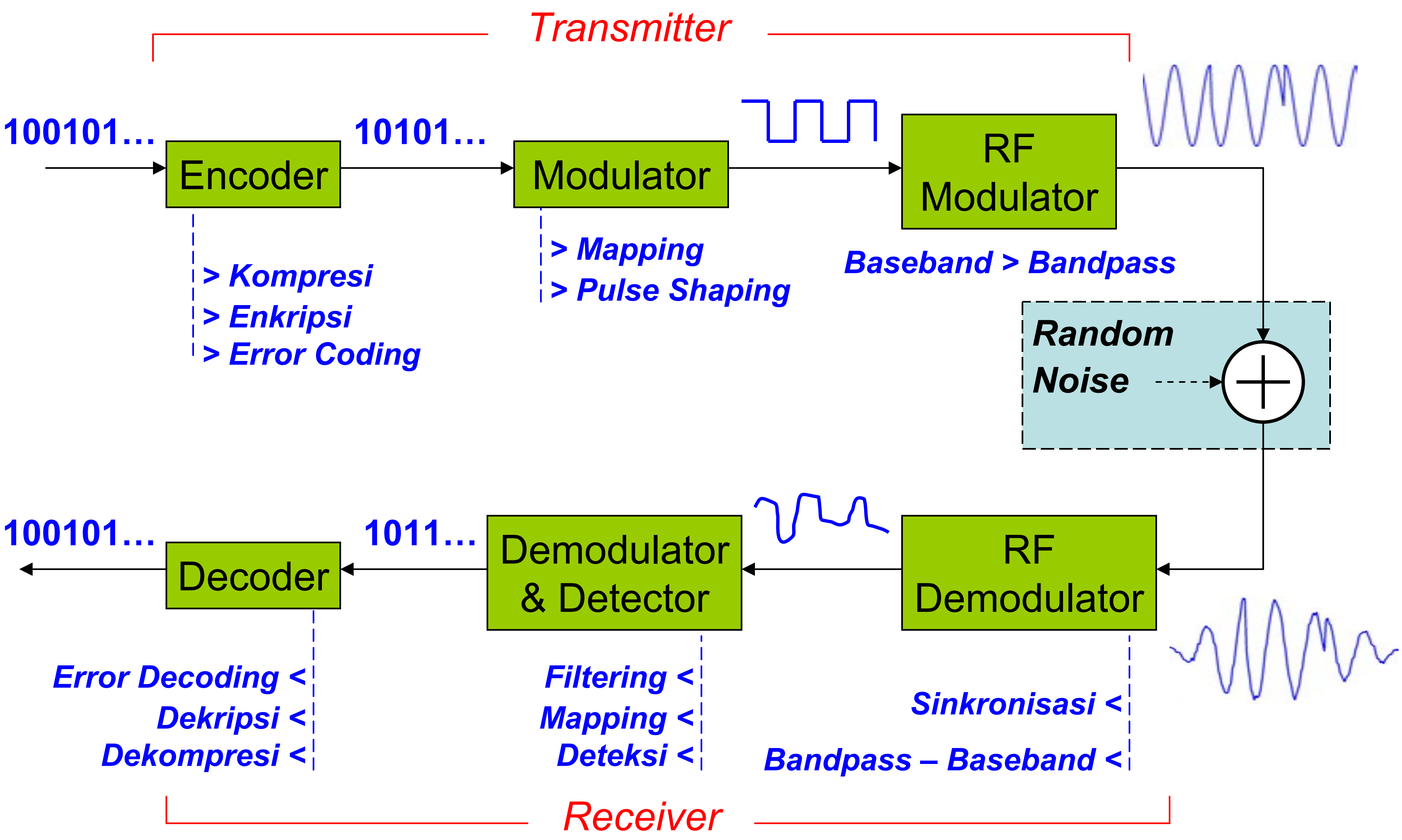
1.1. Pengenalan Sistem Komunikasi Digital – cont.

<u>Model Sistem Komunikasi Digital + Noise</u>:



1.1. Pengenalan Sistem Komunikasi Digital – cont.

Model Sistem Komunikasi Digital + Noise:



1.2. Pendahuluan Stochastic Random Process.

Model Matematis
- ***Deterministic***
- ***Stochastic***

•**Deterministic Model** – model yg digunakan utk menggambarkan suatu proses dimana selalu ada 'kepastian' mengenai suatu variabel yg bergantung pada waktu (sinyal).

<u>Contoh</u>: Sinyal sinusoid: $x(t) = A\cos(\omega_o \cdot t + \theta)$

x(t) dapat di karakteristikan sepenuhnya (deterministic) dari informasi:

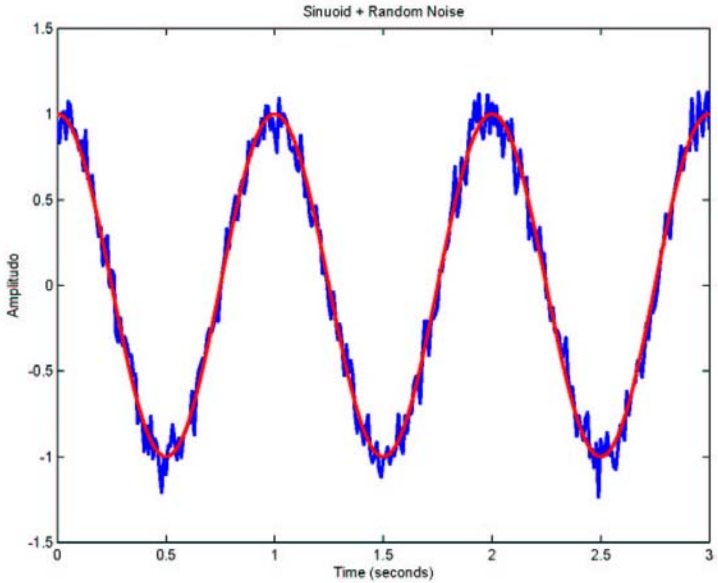
- Amplitudo - *A*
- Frekwensi fundamental – *wo*
- Fase - *theta*

1.2. Pendahuluan Stochastic Random Process – cont.

Stochastic Model – model yg digunakan utk menggambarkan suatu proses dimana tdk ada ‘kepastian’ mengenai suatu variabel yg bergantung pada waktu (sinyal).

Contoh: Sinyal sinusoid + noise: $x(t) = A\cos(\omega_o \cdot t + \theta) + noise(t)$

x(t) dapat tidak dapat di karakteristikan sepenuhnya dari informasi *A*, *wo, dan theta* karena adanya random noise noise(t).



1.2. Pendahuluan Stochastic Random Process – cont.

- Dalam proses alami noise selalu eksis.
- Sumber-sumber noise dlm sistem komunikasi:
  - *'thermal noise'* dari komponen elektronika.
  - Interferensi dari perangkat radio di sekitar receiver.
  - Interferensi dari pengguna saluran telekomunikasi yg lain.

→ **Sinyal sistem komunikasi bersifat random (acak).**

→ Bagaimana kita bisa menjelaskan sesuatu yang bersifat random?

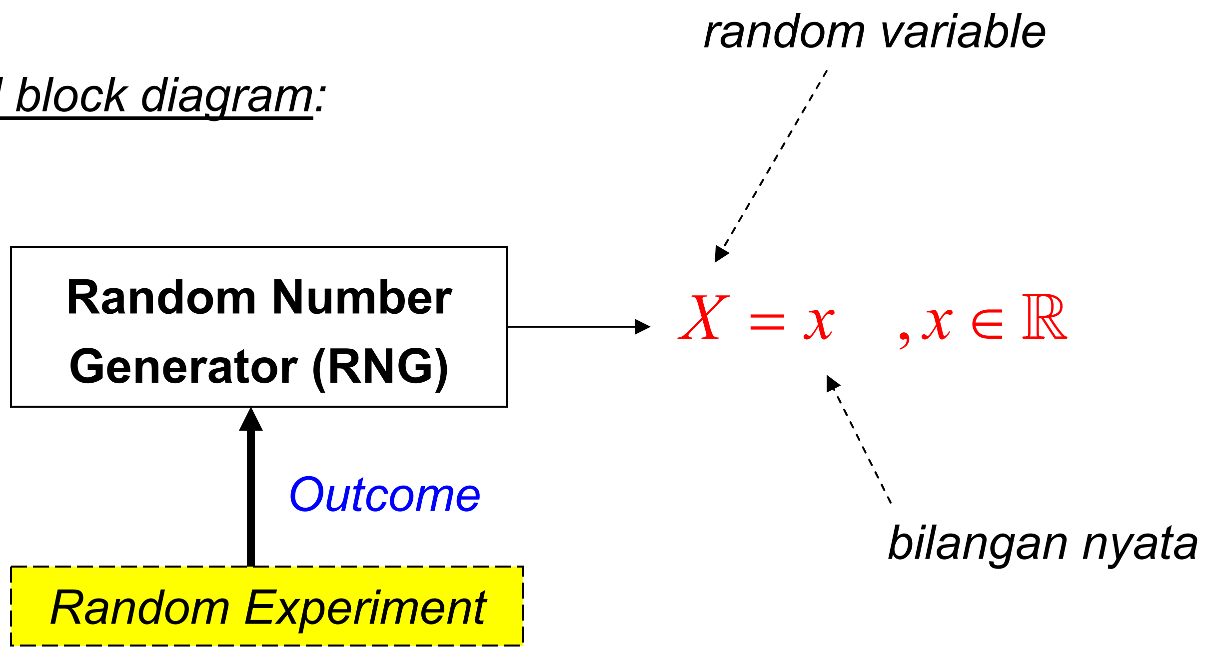
Answer: **Statistical (Stochastic) Modelling**

Stochastic Model memungkinkan kita menggambarkan suatu proses random dalam 'bahasa' statistik sehingga proses tersebut dapat di karakterisasi, dianalisa, dan diolah.

1.3. Random Variable

Definisi: Sebuah *Random Variable X* adalah sebuah bilangan nyata yang merupakan hasil pemetaan outcome dari sebuah random experiment.

Conceptual block diagram:

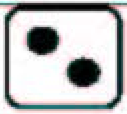
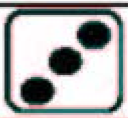
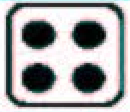
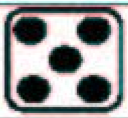
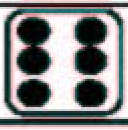


1.3. Random Variable – cont.

Contoh:

Random experiment: *"melempar sebuah dadu & melihat sisi yg muncul"*

Random Variable ~ *X = f(s) : jumlah dot pada sisi yang muncul*

Sample Outcome	Definisi Sample Outcome	X = f(s)
s1	Outcome: 	1
s2	Outcome: 	2
s3	Outcome: 	3
s4	Outcome: 	4
s5	Outcome: 	5
s6	Outcome: 	6

1.3. Random Variable – cont.

Parameter-parameter Statistik dari Random Variable *X*

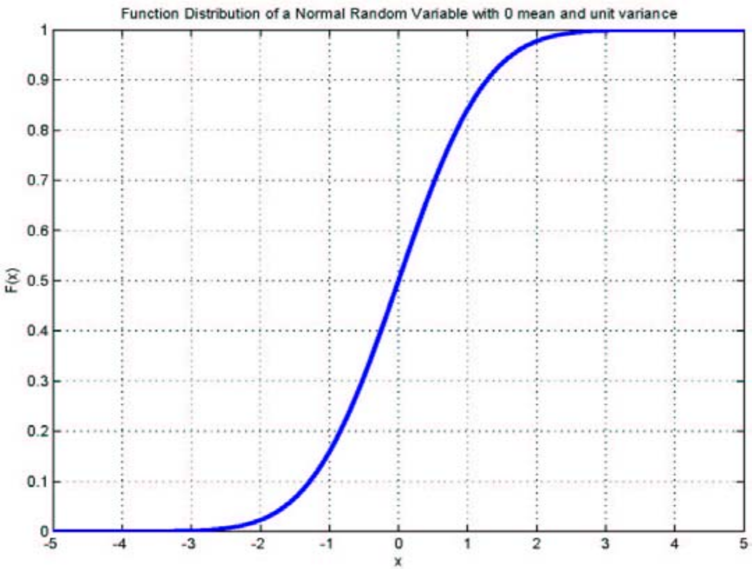
(1). Distribution Function

Definisi: Distribution Function dari sebuah random variable X adalah probabilitas X bernilai lebih kecil atau sama dengan *x*.

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Sifat-sifatnya:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad bila\ x_1 \leq x_2$
3. $F_X(-\infty) = 0$
4. $F_X(+\infty) = 1$



1.3. Random Variable – cont.

Parameter-parameter Statistik dari Random Variable *X* – cont.

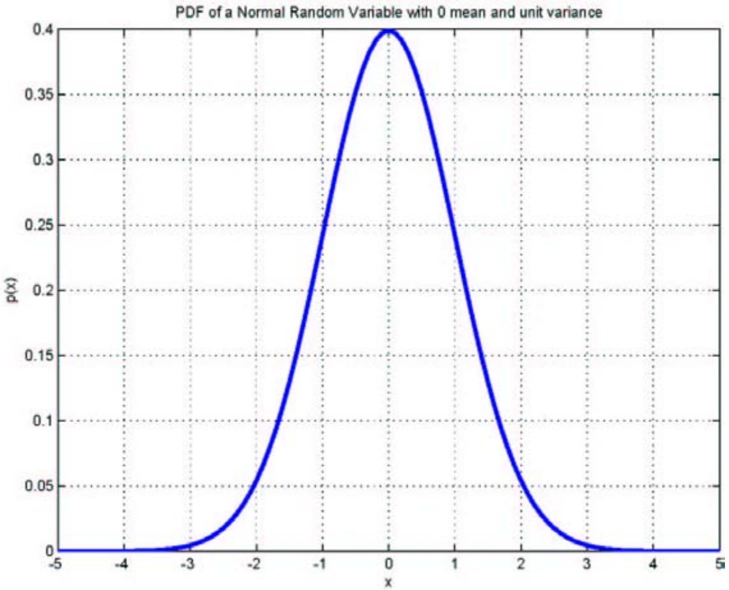
(2). Probability Distribution Function (PDF)

Definisi: Probability Distribution Function dari sebuah random variable *X* adalah:

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Sifat-sifatnya:

1. $p_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot dx = 1$



Interpretasi: PDF menggambarkan frekwensi munculnya nilai *x* di dalam random variable X.

1.3. Random Variable – cont.

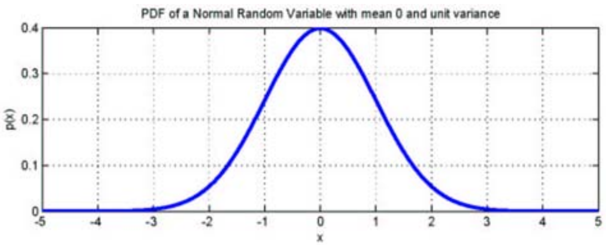
Parameter-parameter Statistik dari Random Variable *X* – cont.

(3). Average (Mean) ~ $\mu_X(x)$

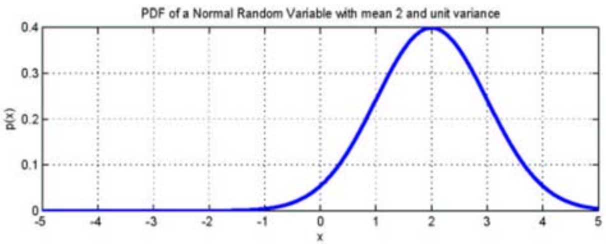
Definisi: *Average / Mean* dari sebuah random variable *X* adalah nilai rata- rata dari *X*:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\, dx$$

- Average / Mean bisa di-interpretasikan sebagai lokasi 'pusat gravitasi' dari sebuah PDF.
- Average / Mean bisa juga berarti nilai *x* yg mempunyai probabilitas terbesar.



Mean = *0*



Mean = *2*

E{ } = *expectation operator*

1.3. Random Variable – cont.

Parameter-parameter Statistik dari Random Variable *X* – cont.

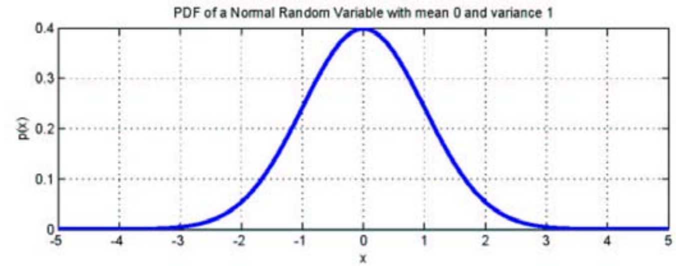
(4). Variance ~ $\sigma_X^2(x)$

Definisi: *Variance* dari sebuah random variable *X* adalah rata-rata (perbedaan antara X dan averagenya)^2 :

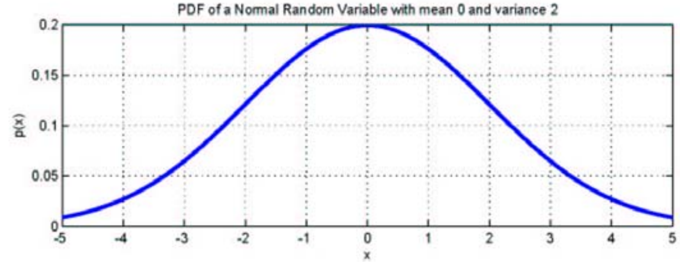
$$E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot p_X(x)\, dx$$

Variance dapat di-interpretasikan sebagai 'penyebaran' nilai dari sebuah random variable.

'penyebaran' proposional dengan lebarnya PDF.



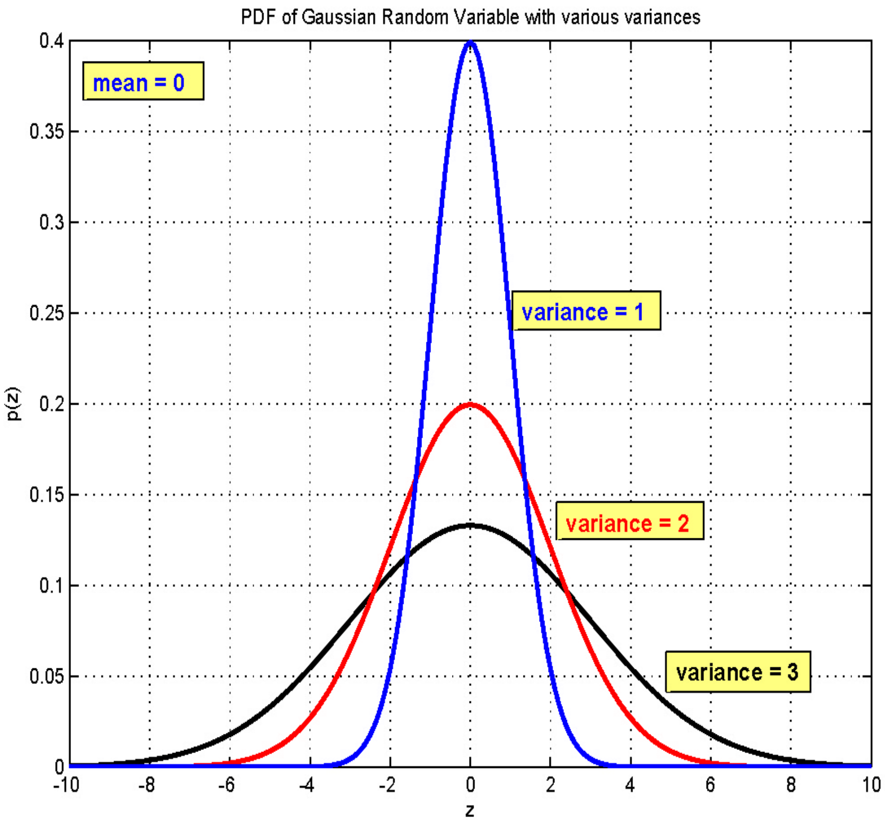
$\sigma_X^2(x) = 1$



$\sigma_X^2(x) = 2$

1.3. Random Variable – cont.

Definisi: *Gaussian random variabel Z* adalah suatu random variable yang di-karakterisasikan oleh Gaussian PDF sebagai berikut:



$$p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(z-\mu_Z)}{\sigma^2}\right)^2}$$

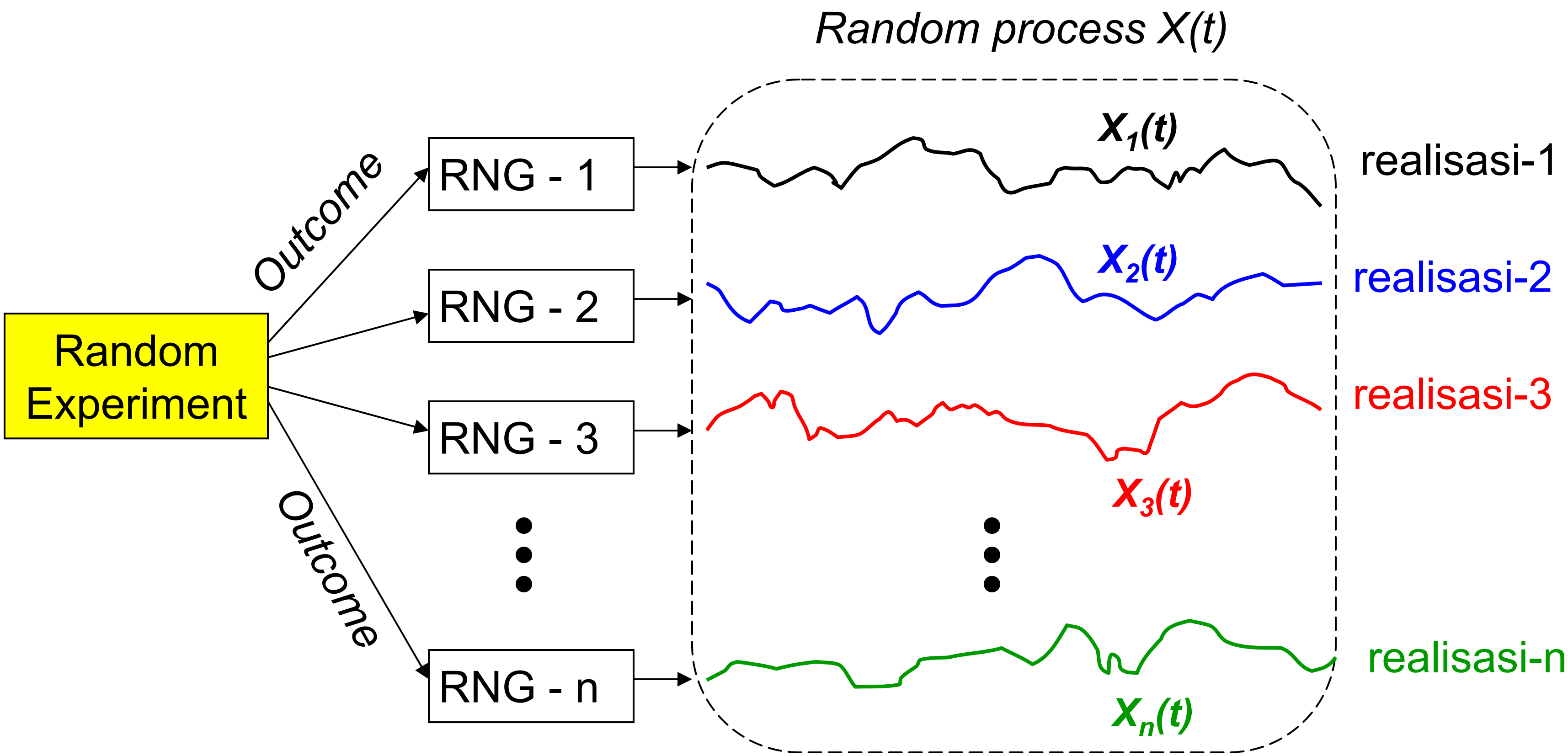
$$\mu_Z = \text{mean of } Z$$

$$\sigma_Z^2 = \text{variance of } Z$$

Gaussian adalah random variable yg terpenting untuk dipelajari dalam sistem komunikasi digital.

1.4. Random Process.

<u>Definisi</u>: *Random process adalah* suatu set (*ensemble*) fungsi dari waktu yang merupakan hasil pemetaan outcome dari suatu random experiment.

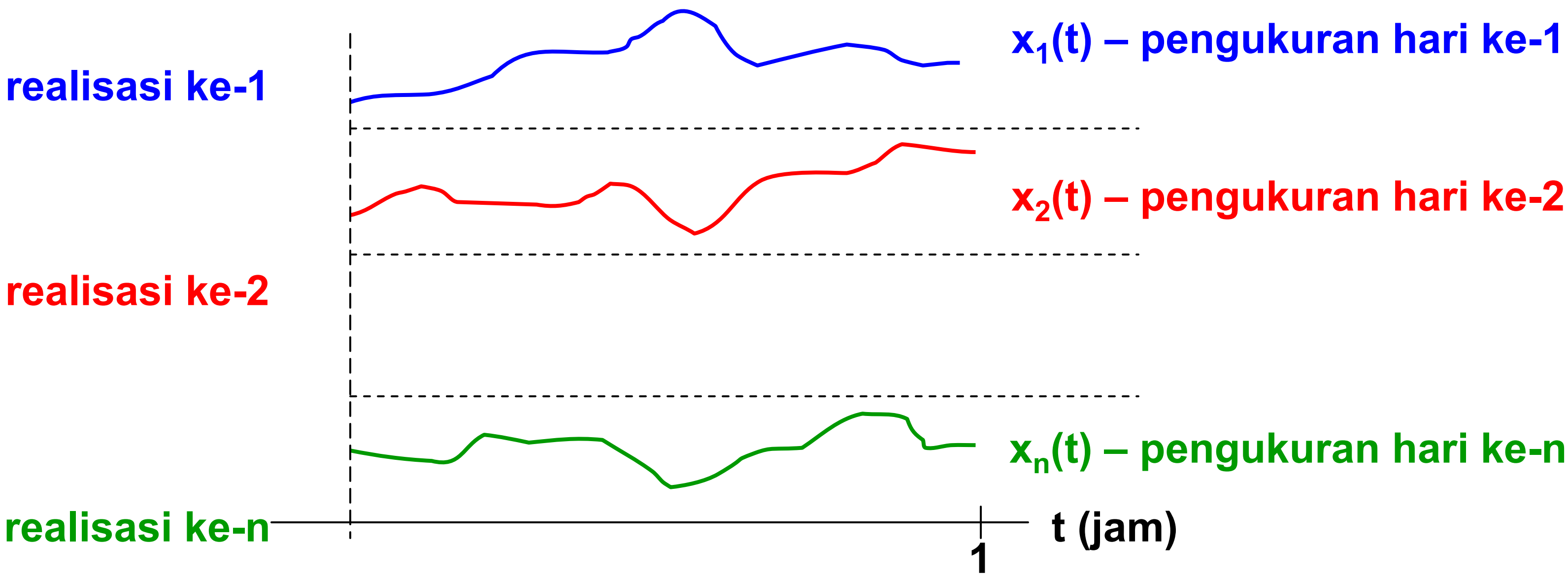


RNG = Random Number Generator

1.4. Random Process – *cont.*

Contoh:

Random experiment: *"pengukuran temperatur dalam sebuah ruangan, pada jam 9 pagi selama 1 jam"*



Konsep Praktis: ***Random process adalah suatu fungsi dari waktu yang amplitudonya bersifat random & parameter statistiknya bersifat konstan (tidak berubah dengan waktu).***

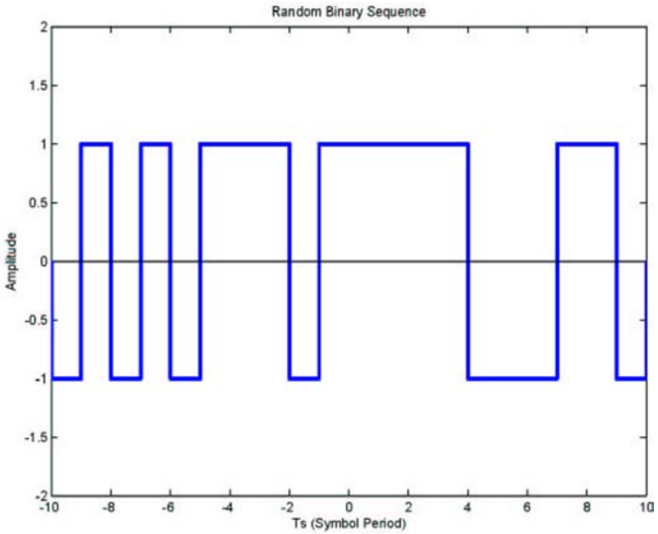
1.4. Random Process – *cont.*

Parameter-parameter Statistik dari Random Process *X(t)*

(1). Mean (Average)

Definisi: *Mean (Average)* dari sebuah random process *X(t)* adalah nilai rata-rata dari sebuah random process tersebut.

$$\mu_X = E\left[X(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)\, dt$$



Contoh: Random Binary sequence:

Pr(*X(t)* = -1) = 1/2

Pr(*X(t)* = +1) = 1/2

$$\mu_X = 0$$

1.3. Random Process – *cont.*

Parameter-parameter Statistik dari Random Process *X(t)* – cont.

(2). Auto-Korelasi

Definisi: *Auto-Korelasi* dari sebuah random process *X(t)* adalah nilai 'kemiripan' antara $X(t)$ dan $X(t-\tau)$.

$$R_X(\tau) = E\left[X(t)\cdot X(t-\tau)\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X(t)\cdot X(t-\tau)\,dt$$

Sifat-sifatnya:

1. $R_X(\tau) = R_X(-\tau) \sim simetris$
2. $R_X(0) = Total\ \ Average\ Power\ of\ \ X(t)$

1.3. Random Process – *cont.*

Parameter-parameter Statistik dari Random Process *X(t)* – cont.

(3). Power Spectral Density (PSD)

Definisi: *Power Spectral Density* dari sebuah random process *X(t)* adalah Fourier transform dari $R_X(\tau)$.

$$G_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\ dt$$

Sifat-sifatnya:

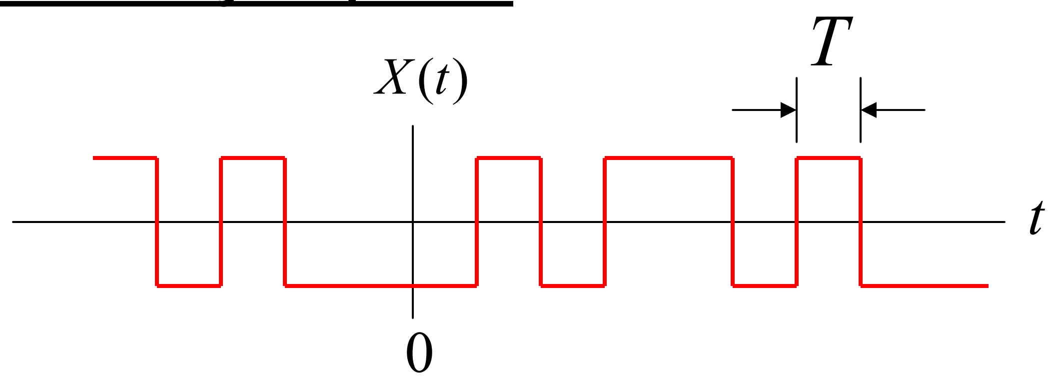
1. $G_X(f) \geq 0$
2. $G_X(f) = G_X(-f) \sim simetris \quad ; bila\ X(t) \in \mathbb{R}$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} G_X(f)\ df = Total\ Average\ power\ of\ X(t)$

1.5. Bentuk Auto-Korelasi & PSD untuk beberapa Sinyal Dasar

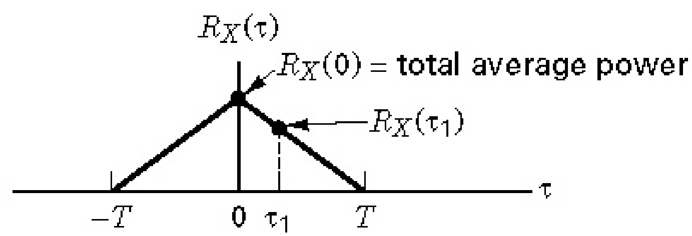
(1). Random Binary Sequence

$$P(X=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(X=-1)=\frac{1}{2}$$

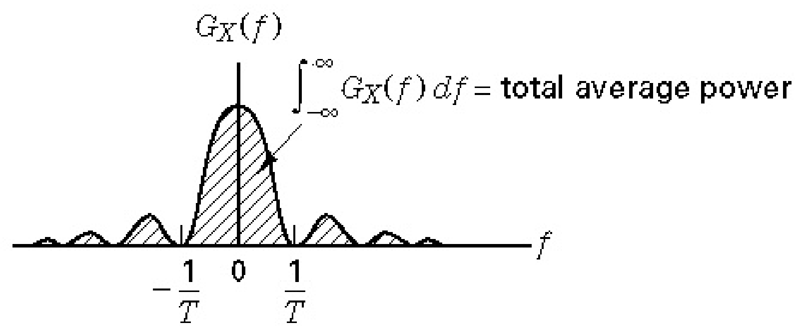


$$R_X(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{\tau}{T} & ;|\tau|\le T\\ 0 & ;|\tau|>T\end{cases}$$

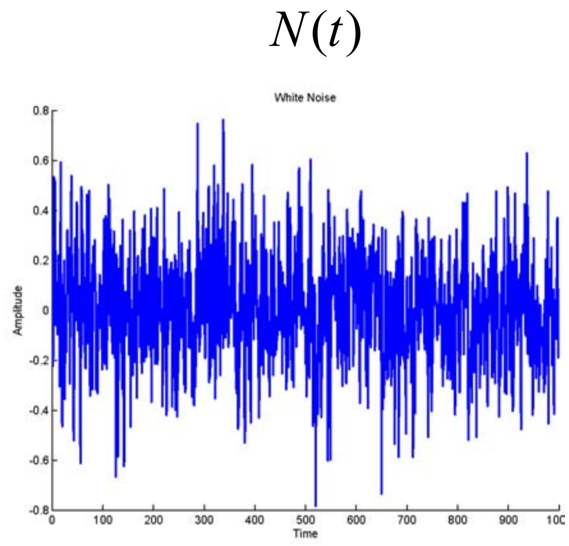


(d)

$$G_X(f)=T\left(\frac{\sin(\pi f t)}{\pi f t}\right)^2$$

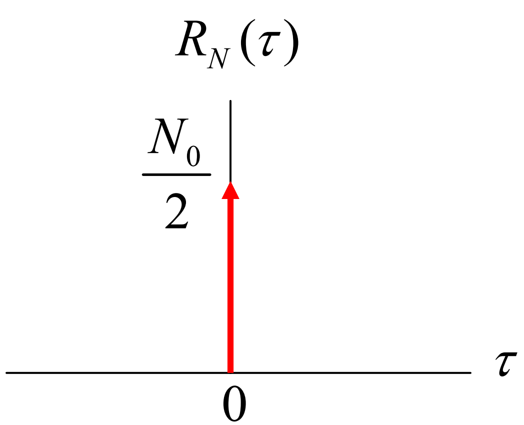


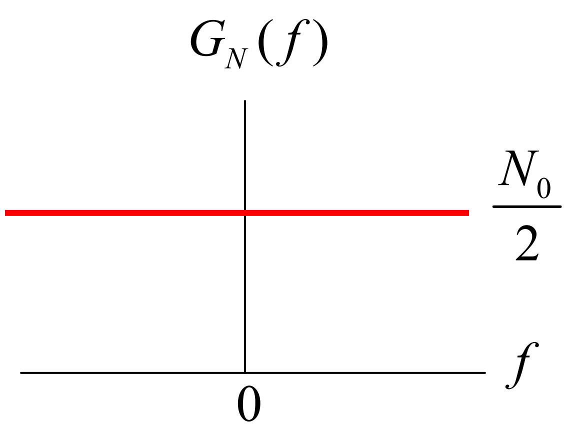
(2). White Gaussian Noise



Karakteristik:

1. Tidak ber-korelasi.
2. PSD nya *flat* untuk semua frekwensi (white).





1.5. Bentuk Auto-Korelasi & PSD utk beberapa Sinyal Dasar – cont.

Dalam sistem komunikasi digital, White Gaussian Noise (WGN) adalah tipe random process yang paling relevan karena 3 alasan berikut:

1. Thermal noise dapat dikarakterisasikan sebagai WGN.
2. WGN mempunyai bentuk Auto-korelasi dan PSD yang sederhana sehingga memudahkan analisa.
3. Gabungan dari banyak random process dengan berbagai tipe distribusinya mempunyai kecenderungan untuk menjadi Gaussian random process (*Central Limit Theorem).*

1.6. Transmisi Sinyal melalui Sistem Linier.

Respon Sistem Linier (terhadap sinyal deterministik).

Input → Sistem Linier → Output

x(t) * h(t) = y(t) **Domain Waktu**

X(f) • H(f) = Y(f) **Domain Frekwensi**

Fourier Transform:

$$Y(f) = \int_{0}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \; dt$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi ft} \; df$$

Konvolusi:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \, d\tau$$

1.6. Transmisi Sinyal melalui Sistem Linier – cont.

Fungsi Transfer:

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \quad \sim \text{Fungsi Transfer}$$

$$H(f) = \underbrace{|H(f)|}_{\text{Magnitudo}} \cdot e^{j \overbrace{\angle H(f)}^{\text{Sudut}}}$$

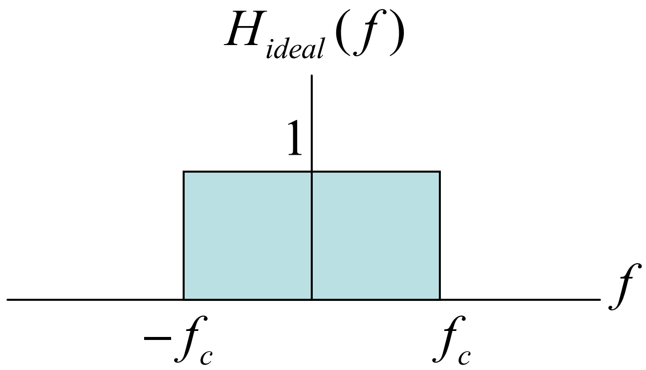
If $\quad X(f) = |X(f)| \cdot e^{j\angle X(f)}$,

Then, $\quad Y(f) = |H(f)| \cdot |X(f)| \, e^{j(\angle H(f) + \angle X(f))}$

1.6. Transmisi Sinyal melalui Sistem Linier – cont.

Lowpass Filter Ideal:

$$H_{ideal}(f) = \begin{cases} 1 & ; |f| \le f_c \\ 0 & ; |f| > f_c \end{cases}$$

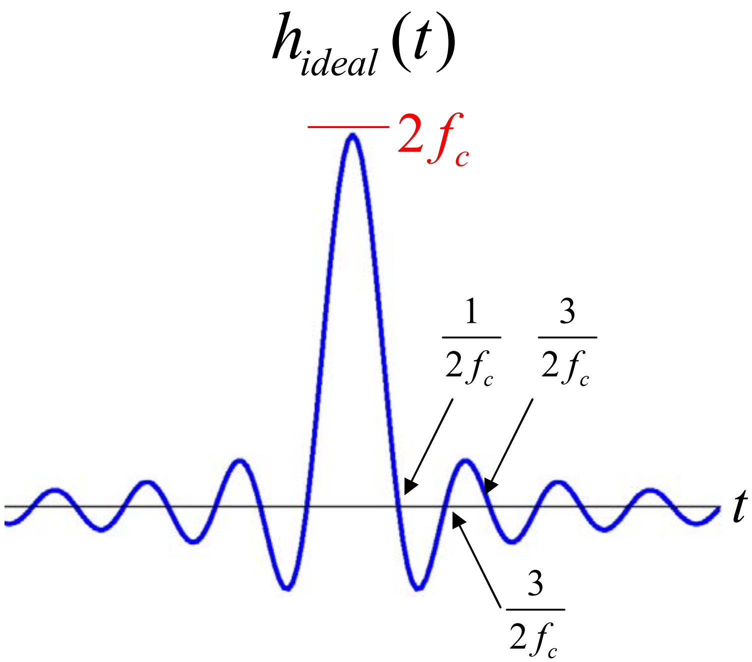


$$h_{ideal}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{ideal}(f) \cdot e^{j2\pi ft}\, df$$

$$= \int_{-f_c}^{f_c} e^{j2\pi ft}\, df$$

$$= \frac{1}{j2\pi t}\left[e^{j2\pi f_c t} - e^{-j2\pi f_c t}\right]$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}$$



1.6. Transmisi Sinyal melalui Sistem Linier – cont.

Respon Sistem Linier (terhadap random process).

Input (random process) → Sistem Linier → Output (random process)

$X(t) \quad * \quad h(t) \quad = \quad Y(t)$ **Domain Waktu**

$G_X(f) \quad \bullet \quad |H(f)|^2 \quad = \quad G_Y(f)$ **Domain Frekwensi**

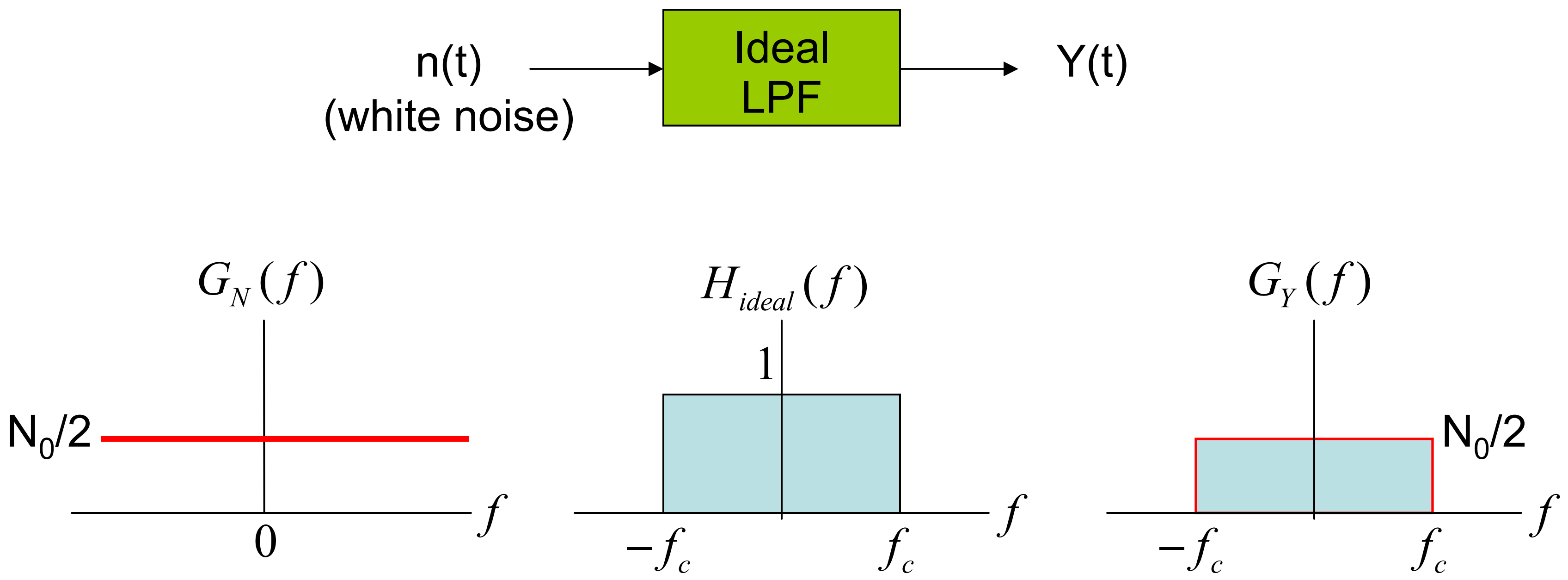
$$G_X(f) = \text{ PSD of } X(t).$$

$$G_Y(f) = \text{ PSD of } Y(t).$$

1.6. Transmisi Sinyal melalui Sistem Linier – cont.

Respon Sistem (terhadap random process) – cont.

Contoh: Ideal Lowpass Filtered White Noise



1.6. Transmisi Sinyal melalui Sistem Linier – cont.

Respon Sistem (terhadap random process) – cont.

Contoh: Ideal Lowpass Filtered White Noise – cont.

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\sin(2\pi f_c \tau)}{\pi\tau}$$